

В. С. ГАЛКИН, М. Н. КОГАН, Н. К. МАКАШЕВ

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ЧЕПМЕНА — ЭНСКОГА

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 25 VI 1974)

Предложено обобщение метода Чепмена — Энскага для вывода газодинамических уравнений путем решения уравнения Больцмана в случаях: 1) смеси многоатомных газов при наличии бимолекулярных химических реакций и $O(\varepsilon) \ll \alpha \ll O(1)$; 2) многоскоростной многотемпературной смеси одноатомных газов. Здесь $\varepsilon = \tau_e / \theta$ — число Кнудсена, $\alpha = \tau_e / \tau_R$, τ_e , τ_R , θ — времена релаксации поступательных и внутренних степеней свободы молекул и характерное газодинамическое время.

1. Система обобщенных уравнений Больцмана имеет вид

$$\varepsilon \frac{df_\alpha}{dt} = J_\alpha^e(f, \tilde{f}) + \alpha J_\alpha^R(f, \tilde{f}), \quad (1.1)$$

где тильдой вводится обезразмеривание; J^e , J^R — суммы интегралов упругих и неупругих столкновений (например, (1)), коэффициенты α могут быть различными по порядку величины для различных типов обменов внутренней энергией. Индексы $\Omega \equiv N\omega$, $\Psi = P\psi$, $\Delta = Q\delta$, $\Lambda = R\lambda$ определяют сорт ($N, P, Q, R = 1, 2, \dots, S$, где S — число компонентов) и внутреннее состояние ($\omega, \psi, \delta, \lambda$) молекул.

Уравнения газодинамики получаются из (1.1) при $\varepsilon \rightarrow 0$ и дополнительных предположениях относительно α (2-6). До сих пор более или менее полно изучены предельные по α случаи «быстрых» ($\varepsilon \rightarrow 0$, $\alpha = O(1)$) и «замедленных» ($\alpha \sim \varepsilon \rightarrow 0$) обменов поступательной и внутренней энергиями молекул. Однако в одном и том же неравновесном течении α может меняться от $\alpha \sim \varepsilon$ до 1, поэтому необходимо иметь уравнения газодинамики, справедливые во всем указанном диапазоне значений α .

Решение (1.1) ищем в виде ряда $f_\alpha = \sum_k f_\alpha^{(k)}$ по степеням ε , считая $\varepsilon \rightarrow 0$ и $\varepsilon \ll \alpha \ll 1$. При всех α равновесие по поступательным степеням свободы молекул устанавливается быстрее или одновременно с равновесием по внутренним степеням и с химическим равновесием. Поэтому решение в нулевом по ε приближении ищем в виде

$$f_\alpha^{(0)} = n_\alpha^{(0)} (m_N / 2kT\pi)^{3/2} e^{-w_\alpha^2}, \quad w_\alpha = (m_N / 2kT)^{1/2} c_\alpha, \quad (1.2)$$

где температура T определяется по кинетической энергии молекул, m_N — масса молекулы, число молекул N -го компонента во внутреннем состоянии ω

$$n_\alpha = \int f_\alpha dc_\alpha, \quad c_\alpha = \xi_\alpha - u. \quad (1.3)$$

С помощью (1.1) и (1.2) получаем систему уравнений Эйлера*, в частности, для $n_\alpha^{(0)}$

$$\frac{Dn_\alpha^{(0)}}{Dt} + n_\alpha^{(0)} \nabla u = R_\alpha^{(0)}, \quad R_\alpha^{(0)} = \int J_\alpha^R(f^{(0)}, f^{(0)}) dc_\alpha \equiv \sum_{\Psi \Delta \Lambda} \Gamma_{\alpha\Psi}^{\Delta\Lambda}, \quad (1.4)$$

$$\Gamma_{\alpha\Psi}^{\Delta\Lambda} = a_{\Delta\Lambda}^{\alpha\Psi} n_\Delta^{(0)} n_\alpha^{(0)} - a_{\alpha\Psi}^{\Delta\Lambda} n_\alpha^{(0)} n_\Psi^{(0)}.$$

* В дальнейшем над уравнениями Эйлера, Навье — Стокса и т. д. понимаются системы уравнений переноса, соответствующие нулевому, первому и т. д. приближениям в обобщенном методе Чепмена — Энскага.

Отсюда имеем $1 \sim (\alpha/\varepsilon) \Gamma_{\Omega\Psi}^{\Delta\Delta}$ поэтому с учетом известных свойств интегралов неупругих столкновений

$$n_{\Delta}^{(0)}, n_{\Lambda}^{(0)} = \frac{n_{0\Delta} n_{0\Lambda}}{n_{0\Omega} n_{0\Psi}} n_{\Omega}^{(0)} n_{\Psi}^{(0)} \left[1 + O\left(\frac{\varepsilon}{\alpha}\right) \right], \quad (1,5)$$

где $n_{0\Omega}$ — равновесное значение числовой плотности Ω -молекул.

Подставляя (1,5) в $J_{\Omega}^R(f^{(0)}, f^{(0)})$, находим

$$\alpha \tilde{J}_{\Omega}^R(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}) = O(\varepsilon) \quad (1,6)$$

поэтому интегралы (1,6) должны входить (рядом с $df_{\Omega}^{(0)}/dt$) в уравнение для $f_{\Omega}^{(1)}$ при всех α . Таким образом, коэффициенты α не определяют истинной величины $J_{\Omega}^R(f^{(0)}, f^{(0)})$, как это можно было бы предположить.

Следовательно, уравнение для $f_{\Omega}^{(0)}$ сводится к $J_{\Omega}^e(f^{(0)}, f^{(0)}) = 0$ и $f_{\Omega}^{(0)}$ действительно имеет вид (1,2), где $n_{\Omega}^{(0)}$, в частности, удовлетворяют (1,4). Такие же уравнения справедливы в «релаксационном» случае ($\alpha = O(\varepsilon)$). В итоге уравнения Эйлера (получаемые с использованием (1,2) из (1,1) и равномерно справедливые с погрешностью $O(\varepsilon)$ по сравнению с единицей для $O(\varepsilon) \ll \alpha \ll O(1)$) будут теми же, что и обычно применяемые для чисто релаксационного случая.

Для определения $f_{\Omega}^{(1)} \equiv f_{\Omega}^{(0)} \varphi_{\Omega}^{(1)}$ можно формально записать систему уравнений

$$\frac{df_{\Omega}^{(0)}}{dt} - J_{\Omega}^R(f^{(0)}, f^{(0)}) = J_{\Omega}^e(f^{(0)}, f^{(0)}) \varphi_{\Omega}^{(1)} + J_{\Omega}^R(f^{(0)}, f^{(0)}) \varphi_{\Omega}^{(1)}, \quad (1,7)$$

где второй член в правой части в α раз меньше первого.

Такие «интерполяционные» уравнения были предложены в (6), однако в силу свойств интегралов неупругих столкновений интегральный оператор в (1,7) является несамосопряженным, что не позволяет найти общее решение (1,7). Но $J_{\Omega}^R(f^{(0)}, f^{(0)}) \varphi_{\Omega}^{(1)}$ можно разбить на самосопряженный J_{Ω}^{RS} и несамосопряженный операторы

$$\frac{1}{2} \sum_{\Psi\Delta\Lambda} \int \left[\frac{H_{\Psi\Omega}}{H_{\Delta\Lambda}} f_{\Delta}^{(0)'} f_{\Lambda}^{(0)'} \pm f_{\Psi}^{(0)} f_{\Omega}^{(0)} \right] (\varphi_{\Delta}^{(1)'} + \varphi_{\Lambda}^{(1)'} \mp \varphi_{\Omega}^{(1)} \mp \varphi_{\Psi}^{(1)}) \cdot g_{\Psi\Omega} d\sigma_{\Psi\Omega} d\xi_{\Psi}, \quad (1,8)$$

где $H_{\Omega\Psi} = q_{\Omega} q_{\Psi} m_N^3 m_P^3$, q_{Ω} — статистический вес ω -состояния N -молекулы, $g_{\Psi\Omega}$ — относительная скорость сталкивающихся молекул, σ — сечение их столкновения. Первый из них (верхние знаки) порядка α и должен быть оставлен в уравнении для $\varphi_{\Omega}^{(1)}$, а второй (нижние знаки), в силу (1,5), порядка ε и его нужно учитывать лишь в неоднородной части уравнения для $\varphi_{\Omega}^{(2)}$.

Исключая $df_{\Omega}^{(0)}/dt$ с помощью уравнений Эйлера, подставляя вместо второго члена правой части (1,7) величину J_{Ω}^{RS} , получаем искомое уравнение для $\varphi_{\Omega}^{(1)}$. В соответствии с числом независимых собственных функций его интегрального оператора (совпадающим с числом сумматорных инвариантов неупругих столкновений) определяем по $f_{\Omega}^{(0)}$ все газодинамические переменные (n, \mathbf{u}, T и т. д.), за исключением плотностей n_{α} , которые ищем в виде ряда по ε : $n_{\alpha} = \sum_k n_{\Omega}^{(k)}$. Проинтегрировав уравнения для $\varphi_{\Omega}^{(1)}$ по \mathbf{c}_{Ω} , убеждаемся, что их решение обладает свойством

$$\int J_{\Omega}^{RS}(f^{(0)}, f^{(0)}) \varphi_{\Omega}^{(1)} d\mathbf{c}_{\Omega} = 0. \quad (1,9)$$

Применяя описанное разбиение интегралов неупругих столкновений с учетом указанного способа определения газодинамических переменных

и свойств, аналогичных (1,9), удается построить общий алгоритм нахождения всех членов обобщенного ряда Чепмена — Энского.

На каждом этапе имеем системы линейных неоднородных интегральных уравнений с самосопряженным интегральным оператором, решения которых существуют и единственны. При этом, в частности, в приближении Навье — Стокса

$$\Phi_{\alpha}^{(1)} = -A_{\alpha} c_{\alpha} \cdot \nabla T - B_{\alpha} [c_{\alpha i} c_{\alpha j}] \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \sum_{\Psi} D_{\alpha \Psi} \mathbf{d}_{\Psi} \cdot c_{\alpha} + G_{\alpha}, \quad (1.10)$$

$$[\Gamma_{ij}] = \frac{1}{2} [\Gamma_{ij} + \Gamma_{ji}] - \frac{\delta_{ij}}{3} \Gamma_{kk},$$

$$\mathbf{d}_{\alpha} = \nabla (n_{\alpha}/n) + (n_{\alpha}/n - m_N n_{\alpha}/\rho) \nabla \ln p,$$

где A, B, D, G — функции $c_{\alpha}^2, T, n_{\alpha}^{(0)}$, сечений упругих и неупругих процессов.

Структура выражений для переносных свойств оказывается такой же, что и в релаксационном случае (2, 3), но в отличие от него коэффициенты переноса здесь сложным образом зависят еще и от сечений неупругих столкновений. В большинстве приложений, когда необходим учет навье — стоксовских членов в основном приближении (пограничный слой, течения с $Re \ll O(1)$) величиной $n_{\alpha}^{(0)}$ можно пренебречь по сравнению с $n_{\alpha}^{(0)}$ (или заменить $n_{\alpha}^{(0)}$ на n_{α}) с погрешностью $O(\varepsilon)$ по сравнению с единицей. Тогда правая часть уравнений для n_{α} имеет тот же вид, что и в (1,4), уравнения первого приближения (уравнения Навье — Стокса) для $O(\varepsilon) \ll \alpha \ll O(1)$ принимают обычно используемую при исследовании течений релаксирующих газов форму, но с более сложными выражениями для коэффициентов переноса.

2. Выше предполагалось, что отношения масс, сечений упругих столкновений и значений концентраций фиксированы, т. е. не связаны с $\varepsilon \rightarrow 0$. Если это не выполняется, то в рамках механики сплошной среды могут иметь место многотемпературные многоскоростные течения смеси газов.

Если $m_N/m_M \ll 1$, то справедлива многотемпературная газодинамика, уравнения для которой модифицированным методом Чепмена — Энского получены в (7) (плазма) и (8) (нейтральные газы). В предельном случае, когда вероятности перекрестных столкновений много меньше вероятности столкновений одинаковых молекул, реализуется многоскоростная многотемпературная гидродинамика (9). Уравнения для этих предельных случаев не переходят одно в другое. Прямое распространение изложенного выше метода позволяет получить здесь единые уравнения гидродинамики, включающие все предельные случаи, в том числе и обычный.

Вместо (1,1) имеем

$$\varepsilon \frac{d\tilde{f}_N}{d\tilde{t}} = J_{NN}(\tilde{f}, \tilde{f}) + \alpha_{NM} J_{NM}(\tilde{f}, \tilde{f}), \quad (2.1)$$

где J_{NM} — интегралы перекрестных столкновений, α_{NM} характеризуют величину вероятностей этих столкновений.

В нулевом по ε приближении

$$f_N^{(0)} = n_N \left(\frac{m_N}{2\pi k T_N^{(0)}} \right)^{3/2} \exp \left\{ -\frac{m_N (\xi_N - \mathbf{u}_N^{(0)})^2}{2k T_N^{(0)}} \right\}. \quad (2.2)$$

Применяя релаксационные уравнения для $u_N^{(0)}$ и $T_N^{(0)}$, находим

$$u_{Ni}^{(0)} - u_{Mi}^{(0)} \sim \frac{\tau_V}{\vartheta} u^*, \quad T_N^{(0)} - T_M^{(0)} \sim \frac{\tau_T}{\vartheta} T^*, \quad (2.3)$$

где

$$\tau_V \sim \frac{m_N + m_M}{m_M n_M + m_N n_N} \Phi_{NM}^{(1)^{-1}}, \quad \tau_T \sim \frac{(m_N + m_M)^2}{(n_N + n_M) m_N m_M} \Phi_{NM}^{(1)^{-1}}, \quad (2,4)$$

$$\Phi_{NM}^{(1)} = \int_0^\infty (1 - \cos' \chi) g_{MN} b db,$$

u^* , T^* — характерные значения скорости и температуры газа.

Из (2,3) и (2,4) нетрудно получить, что $\alpha_{NM} \tilde{J}_{NM}(\tilde{f}^{(0)}, \tilde{f}^{(0)}) = O(\varepsilon)$, т. е. (2,2) действительно представляет собой решение (2,1) с точностью $O(\varepsilon)$ по сравнению с единицей, а уравнения Эйлера для многотемпературной многоскоростной смеси газов, полученные в (9), имеют такую же, равномерную по α , точность.

В уравнении для $f_N^{(1)}$, аналогично п. 1, необходимо оставить самосопряженную часть $J_{NM}(f^{(0)}, f^{(0)})\varphi^{(1)}$. В результате уравнение для $f_N^{(1)}$ принимает вид, формально аналогичный (1,7). Общее решение этого уравнения позволяет определять по $f_N^{(0)}$ плотности n_N , среднemasсовую скорость и температуру газа. При этом u_N и T_N представляются, без знания специальных свойств решения, в виде рядов по степеням ε . С учетом этих обстоятельств и аналогичных (1,9) свойств решения

$$\int \left\{ \frac{m_N c_N^{(0)}}{m_N c_N^{(0),2}} \right\} J_{NM}^s(f^{(0)}, f^{(0)})\varphi^{(1)} dc_N^{(0)} = 0, \quad c_N^{(0)} = \xi_N - u_N^{(0)}, \quad (2,5)$$

можно построить общий алгоритм вычисления всех членов ряда. В первом приближении по полиномам Солина $f_N^{(1)}$ и, следовательно, формулы для переносных свойств имеют ту же структуру, что и при условиях работы (9), но коэффициенты переноса зависят еще и от сечений перекрестных столкновений.

Центральный аэрогидродинамический институт
им. П. Е. Жуковского
Москва

Поступило
18 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. А. Нагнибеда, Н. А. Рыдалевская, Вестн. Ленингр. ун-в., № 19, 140 (1970).
² М. Н. Коган, Динамика разреженного газа, «Наука», 1967. ³ Г. Андерсен, Сборн. Кинетические процессы в газах и плазме, М., 1972. ⁴ С. В. Валландер, И. А. Егорова, Н. А. Рыдалевская, Сборн. Аэродинамика разреженных газов, Л., 1965, стр. 122.
⁵ В. Н. Жигулев, В. М. Кузнецов, Тр. Центр. аэрогидродинамич. инст., в. 1136 (1969).
⁶ В. В. Алексеев, Сборн. Очерки физики и химии низкотемпературной плазмы, «Наука», 1971, стр. 88. ⁷ С. И. Брагинский, Сборн. Вопросы теории плазмы, в. 1, 1963, стр. 183. ⁸ В. С. Галкин, Мех. жидкости и газа, № 6, 58 (1967). ⁹ В. В. Струминский, ПММ, т. 38, в. 2 (1974).