

Л. Г. ГУРОВ

**ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ЛОРЕНЦА.
ОЦЕНКИ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ**

(Представлено академиком А. Д. Александровым 8 VII 1974)

1. В настоящей заметке продолжается изучение квазилоренцевых отображений, начатое в (1). В (1) доказано, что ε -квазилоренцевы отображения ε -близки к лоренцевым отображениям. При этом в (1) речь идет о близости в норме C . В настоящей статье устанавливается близость в норме W_p^1 , т. е. доказывается, что не только сами отображения близки к лоренцевым, но и их первые производные близки к производным лоренцевых отображений (последние в норме L_p).

Напомним определение ε -квазилоренцевых отображений. Пусть U — область в R^n . Топологическое отображение $f: U \rightarrow R^n$, каждая компонента которого имеет в U обобщенные первые производные, мы называем ε -квазилоренцевым, если выполняются следующие условия:

а) для почти всех $x \in U$ для $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$

$$\begin{aligned} [df_{1,x}(X)]^2 + \dots + [df_{n-1,x}(X)]^2 - [df_{n,x}(X)]^2 = \\ = X_1^2 + \dots + X_{n-1}^2 - X_n^2 + \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij}(x) X_i X_j, \end{aligned} \quad (1)$$

где $|\alpha_{ij}(x)| < \varepsilon$;

б) производная $df_n/\partial x_n$ имеет один и тот же знак всюду, где она существует.

Совокупность всех ε -квазилоренцевых отображений области U обозначим через $L(\varepsilon, U)$.

В дальнейшем мы используем следующие обозначения: f' — матрица Якоби для отображения f , E — единичная матрица, $|A| = \max_{i \leq n, j \leq n} |A_{ij}|$ — норма матрицы $A = \|A_{ij}\|$.

Теорема 1. Пусть B — куб в R^n с ребрами, параллельными осям координат. Предположим еще, что $0 \leq \varepsilon \leq \delta_n$, $1 \leq p \leq \varepsilon^{-1} \gamma_n$. И пусть $f \in L(\varepsilon, B)$.

Тогда найдется такое преобразование Лоренца φ , что

$$\| |(\varphi \circ f)' - E| \|_{L_p(B)} \leq A_n \varepsilon p; \quad (2)$$

здесь δ_n, γ_n, A_n — постоянные, зависящие только от n .

В (2), теорема V, доказано, что для ε -квазиизометрических отображений неравенство типа (2) выполняется для всех $p \geq 1$. Имеются примеры, которые показывают, что для ε -квазилоренцевых отображений ограничение $p \leq \varepsilon^{-1} \text{const}$ существенно.

В дальнейшем мы используем некоторые результаты и некоторые рассуждения работы (2).

Следующее предложение показывает, каким образом теорема 1 может быть распространена на случай произвольной области.

Следствие. Пусть U — область в R^n , d и D — ее внутренний и внешний радиусы $(^1, ^2)$, S — площадь ее границы. Предположим, что

$$0 < d \leq D < \infty, \quad S < \infty, \quad 0 \leq \varepsilon \leq \delta_n, \\ 1 \leq p \leq \frac{a_n d}{\varepsilon D \log(D/d)}.$$

Тогда для всякого отображения $f \in L(\varepsilon, U)$ найдется преобразование Лоренца φ такое, что

$$\|(\varphi \circ f)' - E\|_{L_p(V)} \leq A_n \varepsilon p \frac{D}{d} \log \frac{D}{d} \left(\frac{Sd}{\text{mes } U} \right)^{1/p},$$

где постоянные δ_n , a_n и A_n зависят только от n .

Под площадью границы области понимается верхняя внутренняя мера поверхности в смысле Минковского $(^3)$.

Примеры показывают, что условие $0 < d \leq D < \infty$ не достаточно. В то же время требование конечности S может быть ослаблено.

2. Теорема 1 легко вытекает из следующего предложения.

Лемма 1. Пусть B — куб в R^n с ребрами, параллельными осям координат. Для всякого отображения $f \in L(\varepsilon, B)$, где $0 \leq \varepsilon \leq \delta_n$, найдется такое преобразование Лоренца φ , что для любого $t \geq 0$

$$\text{mes}\{x \in B: |(\varphi \circ f)' - E| > t\} \leq A_n (1+t)^{-\frac{1}{a_n \varepsilon}} \text{mes } B,$$

где постоянные δ_n , A_n , a_n зависят только от n .

В свою очередь доказательство леммы 1 основано на двух следующих леммах.

Лемма 2. Пусть вектор-функция $u(x) = (u_1(x), \dots, u_m(x))$ суммируема в кубе $C_0 \subset R^n$. Предположим, что существуют постоянная $\beta \leq (1/2)^{n+3}$ и для всякого параллельного подкуба C постоянный вектор a_c такие, что

$$(\text{mes } C)^{-1} \int_C |u(x) - a_c| dx \leq \beta |a_c|.$$

Тогда для $\sigma > e\beta |a_{c_0}|$

$$\text{mes}\{x \in C_0: |u(x) - a_{c_0}| > \sigma |a_{c_0}|\} \leq B(1+\sigma)^{-1/(b\beta)} \text{mes } C_0,$$

где постоянные B и b зависят только от n .

Лемма 2 является некоторой вариацией леммы 1 из $(^4)$ и доказывается аналогично.

Матрицу A назовем ε -квазиортогональной, если она представима в виде $A = \gamma(E + e)$, где γ — некоторая ортогональная матрица и $|e| < \varepsilon$. Будем писать $M = O(N)$, если $|M| \leq |N| \cdot \text{const}$, где постоянная зависит только от n .

Лемма 3. Пусть B — куб в R^n объема V . Предположим, что почти всюду в B определена ε -квазиортогональная матрица $A(x) = \|A_{ij}(x)\|$, причем выполняются соотношения

$$\int_B |A_{ii} - 1| dx = O(\varepsilon V), \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (3)$$

$$\int_B [(A_{ii} - 1)(A_{jj} - 1) - A_{ij}A_{ji}] dx = O(\varepsilon^2 V), \quad i, j = 1, \dots, n, i \neq j. \quad (4)$$

Тогда для любого $M \geq 0$

$$\text{mes}\{x \in B: |A - E| > M\varepsilon\} \leq E_n e^{-F_n M} V.$$

Постоянные E_n , F_n зависят только от n .

Доказательство леммы 3 можно извлечь из доказательства теоремы V в (2).

3. Докажем лемму 1. Согласно теореме 1 из (1), для всякого отображения $f \in L(\varepsilon, C)$, где C — куб с ребром h_C , существует преобразование Лоренца φ_C такое, что для $x \in C$

$$|\varphi_C[f(x)] - x| \leq D_n \varepsilon h_C. \quad (5)$$

Фиксируем некоторое отображение $f \in L(\varepsilon, B)$. Положим

$$\Phi(x) \equiv \varphi_B \circ f(x) - x \equiv g(x) - x; \quad \Phi_{ij} = \partial \Phi_i / \partial x_j.$$

Из (1) и (5) вытекает соотношение

$$\begin{aligned} |\Phi_{nn}| &\leq \Phi_{nn} + 2\varepsilon, \\ |\Phi_{ii}| &\leq \Phi_{ii} + 2|\Phi_{nn}| + O(\varepsilon), \quad i=1, 2, \dots, n-1, \\ |\Phi_{ij}| &\leq |\Phi_{ii}(2 + \Phi_{ii})|^{1/2} + |\Phi_{nn}(2 + \Phi_{nn})|^{1/2} + O(\varepsilon), \quad i \neq j. \end{aligned}$$

Отсюда имеем

$$\|\Phi_{ii}\|_{L(B)} = O(\varepsilon), \quad i=1, 2, \dots, n, \quad (6)$$

а также

$$\|\Phi_{ij}\|_{L(B)} = O(\sqrt{\varepsilon}), \quad i, j=1, 2, \dots, n. \quad (7)$$

Тем самым выполнены условия леммы 2 с $\beta = O(\sqrt{\varepsilon})$. Поэтому

$$\|\Phi_{ij}\|_{L_p(B)} = O(\sqrt{\varepsilon}).$$

Далее так же, как и в (2), показывается, что

$$\int_B (\Phi_{ii}\Phi_{jj} - \Phi_{ij}\Phi_{ji}) dx = O(\varepsilon^2 h_B^n), \quad i \neq j. \quad (8)$$

Из (6) — (8), используя лемму 2, получаем

$$\|\Phi_{ij}\|_{L_p(B)} = O(\varepsilon^{2/3} p). \quad (9)$$

Введем в рассмотрение матрицу $G = \|G_{ij}\|$:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= g_{ij} - \frac{g_{in}g_{nj}}{g_{nn}+1} \quad \text{для } i < n, j < n; \\ G_{in} &= G_{ni} = 0 \quad \text{для } i < n; \quad G_{nn} = 1. \end{aligned} \quad (10)$$

Матрица G квазиортогональна и удовлетворяет условиям леммы 3. В самом деле, (3) выполнено, так как для $i < n, j < n$

$$\|G_{ij} - \delta_{ij} - \Phi_{ij}\|_{L_p(B)} = \left\| \frac{\Phi_{in}\Phi_{ni}}{g_{nn}+1} \right\|_{L_p(B)} = O(\varepsilon p). \quad (11)$$

Соотношение (4) следует из (9) и (10).

В силу леммы 3

$$\|G_{ij} - \delta_{ij}\|_{L_2(B)} = O(\varepsilon).$$

Отсюда получаем

$$\|\Phi_{ij}\|_{L_2(B)} = O(\varepsilon).$$

Для завершения доказательства осталось только еще раз применить лемму 2.

4. Следствие доказывается с помощью разбиения области на кубы, ребра которых параллельны осям координат. Можно построить разбиение, удовлетворяющее следующим условиям:

а) кубы имеют ребра длины $h_m = 2d/(\sqrt{n} \cdot 2^m)$, причем в разбиение входит куб B_0 с ребром $h_0 = 2d/\sqrt{n}$;

б) любой куб с ребром h_m можно соединить с B_0 цепочкой кубов, длина которой не превышает числа $k_m = 2m(D/d) \log(D/d)$, причем длины ребер любых двух соседних кубов в цепочке будут отличаться друг от друга не более, чем в два раза;

в) число кубов в разбиении с ребром h_m не превосходит величины $c_m = S(2^{m-1} \sqrt{nd}^{-1})^{n-1}$.

При выполнении этих условий в качестве преобразования φ можно выбрать преобразование Лоренца для куба B_0 , существование которого доказано в теореме 1.

Автор выражает благодарность Ю. Г. Решетняку за постоянное внимание и помощь в работе.

Новосибирский электротехнический институт

Поступило
19 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Г. Гуров, ДАН, т. 243, № 2, 267 (1973). ² F. John, Comm. on Pure and Appl. Math., v. 14, 3, 391 (1961). ³ Г. Хадвигер, Лекции об объеме площади поверхности и изопериметрии, М., 1966. ⁴ F. John, L. Nirenberg, Comm. on Pure and Appl. Math., v. 14, 3, 415 (1961).