Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 4

УДК 517.43

МАТЕМАТИКА

М. А. БАРТОШЕВИЧ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ВАТСОНА

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 18 VII 1974)

1. Преобразования Ватсона были введены Ватсоном в 1933 г. ([1]) и рассматривались Титчмаршем ([2]) и другими авторами. Основные результаты работ до 1960 г. приведены в обзорной статье ([3]).

В настоящей работе найдено разложение произвольного оператора Ватсона по ортогональной системе операторов Ватсона; дается алгоритм построения таких систем.

2. Оператор Ватсона ([1, 2]), действующий в вещественном функциональном пространстве $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$, определяется формулой

$$Wf(x)=\frac{d}{dx}\left\{x\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^W(xs)f(s)\,ds\right\}, \tag{1}$$

где $f(x)\in\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$, а функция $\psi^W(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\psi^W(sx)\psi^W(tx)\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } st<0,\\ [\max(|s|, |t|)]^{-1} & \text{при } st>0.\end{cases} \tag{2}$$

Назовем $\psi^W(x)$ ядром оператора Ватсона W и будем писать $\psi^W(x)\to\to W$. Пусть $\mathfrak{W}_1$ — множество всех операторов Ватсона с ядрами, равными нулю при $x<0$.

Рассмотрим функцию

$$\psi^T(x)=\begin{cases}1 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 0 & \text{при прочих значениях } x.\end{cases}$$

Если $\psi^W(x)\to W\in\mathfrak{W}_1$, то

$$W\psi^T(x)=\psi^W(x), \tag{3}$$

$$W\psi^W(x)=\psi^T(x). \tag{4}$$

Если $W_1\in\mathfrak{W}_1$ и $\psi_2{}^W(x)\to W_2\in\mathfrak{W}_1$, то $W_1\psi_2{}^W(x)\to W_3\in\mathfrak{W}_1$; доказательство по существу содержится в ([3]).

3. Рассмотрим линейную оболочку множества $\mathfrak{W}_1$; для двух любых операторов V_1 и V_2 из этой линейной оболочки определим скалярное произведение формулой

$$(V_1, V_2)=(V_1\psi^T, V_2\psi^T)_{\mathscr{L}_2}. \tag{5}$$

Пусть $\{\mathfrak{W}_1\}$ — замкнутая линейная оболочка множества $\mathfrak{W}_1$; $\{\mathfrak{W}_1\}$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением (5). Норма линейного оператора $V\in\{\mathfrak{W}_1\}$, порожденная скалярным произведением (5), не совпадает с его обычной нормой.

4. Пусть V — вещественный унитарный оператор, отображающий $\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$ на себя; $Vf(x)=F(x)$, где $f(x)\in\mathscr{L}_2(-\infty, \infty)$.

Теорема 1. $V\in\mathfrak{W}_1$ тогда и только тогда, когда

$$Vf(ax)=\frac{1}{a}F\left(\frac{x}{a}\right). \tag{6}$$

Доказательство достаточности условия (6) состоит в построении ядра Бохнера унитарного оператора V и в проверке того, что построенный оператор Бохнера оказывается оператором Ватсона.

Следствия. *Если* $W_k \in \mathfrak{W}_1$, $k=1, 2, \ldots, 2n+1$, *то*

$$\prod_{k=1}^{2n+1} W_k \in \mathfrak{W}_1, \quad \prod_{k=1}^{2n} W_k \in \mathfrak{W}_1.$$

Если $V_k \in \{\mathfrak{W}_1\}$, $\quad k=1, 2, \ldots, 2n+1$, *то*

$$\prod_{k=1}^{2n+1} V_k \in \{\mathfrak{W}_1\}, \qquad \prod_{k=1}^{2n} V_k \notin \{\mathfrak{W}_1\}.$$

Доказательство состоит в проверке выполнения критерия (6).

5. Пусть $\mathfrak{W}_2$ — множество произведений четного числа операторов из $\mathfrak{W}_1$. Рассмотрим линейную оболочку множества $\mathfrak{W}_2$; для двух любых операторов Z_1 и Z_2 из этой линейной оболочки определим скалярное произведение формулой

$$(Z_1, Z_2) = (Z_1\psi^T, Z_2\psi^T)_{\mathscr{L}_2}. \tag{7}$$

Пусть $\{\mathfrak{W}_2\}$ — замкнутая линейная оболочка множества $\mathfrak{W}_2$; $\{\mathfrak{W}_2\}$ есть гильбертово пространство со скалярным произведением (7). Норма линейного оператора $Z \in \{\mathfrak{W}_2\}$, порожденная скалярным произведением (7), не совпадает с его обычной нормой.

6. Пусть W_n, $n=1, 2, \ldots,$ — полная ортогональная система операторов из $\mathfrak{W}_1$. Тогда любой оператор $V \in \{\mathfrak{W}_1\}$ может быть представлен единственным образом в виде

$$V = \sum_{n=1}^{\infty} a_n W_n. \tag{8}$$

Если W — произвольный оператор из $\mathfrak{W}_1$, то WW_n, $n=1, 2, 3, \ldots,$ есть полная ортогональная система в $\{\mathfrak{W}_2\}$. Следовательно, любой элемент из $\{\mathfrak{W}_2\}$ может быть представлен в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n W W_n.$$

7. Пусть $\psi^T(x) \to T \in \mathfrak{W}_1$. Введем функцию

$$\psi^S(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < 1, \\ 1/x & \text{при } x \geqslant 1; \end{cases}$$

пусть $\psi^S(x) \to S \in \mathfrak{W}_1$. Рассмотрим операторы из $\mathfrak{W}_1$ вида $(TS)^n T$, $n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Теорема 2. *Ядра операторов* $(TS)^n T$ *определяются формулой*

$$(TS)^n T\psi^T(x) = \begin{cases} (-1)^n L_n(-\ln x) & \textit{при } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 & \textit{при прочих значениях } x; \end{cases} \tag{9}$$

при $n=0, 1, 2, \ldots$ *и формулой*

$$(TS)^n T\psi^T(x) = \begin{cases} 0 & \textit{при } x < 1, \\ (-1)^{-n-1} x^{-1} L_{-n-1}(\ln x) & \textit{при } x \geqslant 1, \end{cases} \tag{10}$$

при $n=-1, -2, -3, \ldots,$ *где* $L_n(z)$ — *полиномы Лагерра нулевого порядка,* *определяемые формулой*

$$L_n(z)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{n!z^k}{(n-k)!(k!)^2}.$$

Следствие 1. *Ядра операторов $(TS)^nT$ при $n=0,1,2,\ldots$ образуют полную ортонормированную систему в $\mathscr{L}_2(0,1)$, а при $n=-1,-2,-3,\ldots$ — полную ортонормированную систему в $\mathscr{L}_2(1,\infty)$, что следует из известных свойств полиномов Лагерра.*

Совокупность всех указанных ядер образует полную ортонормированную систему в $\mathscr{L}_2(0,\infty)$.

Следствие 2. *Операторы $(TS)^nT$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, образуют полную ортогональную систему в $\{\mathfrak{W}_1\}$.*

Теорема 3. *Пусть W — произвольный элемент из $\mathfrak{W}_1$. Тогда $(TS)^nW$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, есть полная ортогональная система операторов в $\{\mathfrak{W}_1\}$.*

Доказательство основано на следующем свойстве операторов Ватсона:

$$(W_1W_2)^nW_3=W_3(W_2W_1)^n.$$

Следствие. *Пусть $W_1, W_2\in\mathfrak{W}_1$. Тогда операторы $W_2(TS)^nW_1$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, образуют полную ортогональную систему в $\{\mathfrak{W}_2\}$.*

Замечание. Полагая $W_2=T$, $W_1=S$, получаем: $(TS)^n$, $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$, — полная ортогональная система в $\{\mathfrak{W}_2\}$.

Теорема 4. *Произвольный оператор $V\in\{\mathfrak{W}_1\}$ может быть представлен единственным образом в виде*

$$V=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(TS)^nT. \qquad (11)$$

Замечание. Если $\psi^W(x)\to W\in\mathfrak{W}_1$, то в разложении

$$W=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(TS)^nT.$$

коэффициенты могут быть найдены по формулам

$$a_n=(-1)^n\int_0^1\psi^W(x)L_n(-\ln x)\,dx, \qquad n=0,1,2,\ldots, \qquad (12)$$

$$a_n=(-1)^{n-1}\int_1^\infty\psi^W(x)x^{-1}L_{-n-1}(\ln x)\,dx, \qquad n=-1,-2,\ldots \qquad (13)$$

Теорема 5. *Произвольный оператор $Z\in\{\mathfrak{W}_2\}$ может быть представлен единственным образом в виде*

$$Z=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_n(TS)^n. \qquad (14)$$

8. При $|\lambda|<1$ справедливы следующие формулы:

$$(T+\lambda S)^{-1}f(x)=\frac{1}{(1-\lambda)^2}x^{\lambda/(1-\lambda)}\int_0^{1/x}s^{\lambda/(1-\lambda)}f(s)\,ds-\frac{1}{1-\lambda}\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (15)$$

$$(S+\lambda T)^{-1}f(x)=\frac{-\lambda}{(1-\lambda)^2}x^{-1/(1-\lambda)}\int_{1/x}^{\infty}s^{-1/(1-\lambda)}f(s)\,ds-\frac{1}{1-\lambda}\frac{1}{x}f\left(\frac{1}{x}\right). \qquad (16)$$

Доказательство, например, первой из этих формул основывается на очевидном разложении

$$(T+\lambda S)^{-1}f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\lambda^n(TS)^nTf(x),$$

в котором $(TS)^nTf(x)$ выражается через $f(x)$ и ядро оператора $(TS)^nT$; полученный ряд суммируется с использованием известного свойства производящей функции для полиномов Лагерра.

9. Пусть

$$T(a)\leftarrow\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^T\left(\frac{x}{a}\right),\quad S(a)\leftarrow\frac{1}{\sqrt{a}}\psi^S\left(\frac{x}{a}\right).$$

Имеют место разложения, справедливые при $0<a\leqslant 1$:

$$T(a)=\sqrt{a}\left\{T+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[L_n(-\ln a)-L_{n-1}(-\ln a)](TS)^nT\right\},\tag{17}$$

$$T\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{a}\left\{T+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[L_n(-\ln a)-L_{n-1}(-\ln a)]S(TS^{n-1})\right\},\tag{18}$$

$$S(a)=\sqrt{a}\left\{S+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[L_n(-\ln a)-L_{n-1}(-\ln a)](TS)^{n-1}T\right\}\tag{19}$$

$$S\left(\frac{1}{a}\right)=\sqrt{a}\left\{S+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n[L_n(-\ln a)-L_{n-1}(-\ln a)]S(TS)^n\right\}.\tag{20}$$

Формулы (17)—(20) позволяют находить решение $f(x)\in\mathscr{L}_2(-\infty,\infty)$ функциональных уравнений вида

$$\sum_{k=1}^{n}c_kf(a_kx)=h(x),\quad \sum_{k=1}^{n}c_kf\left(\frac{a_k}{x}\right)=h(x),$$

где $h(x)$ — заданная функция из $\mathscr{L}_2(-\infty,\infty)$.

10. Разложения (11) и (14) могут быть применены для отыскания решения некоторых классов линейных интегральных уравнений с ядрами, зависящими от произведения или частного аргументов.

Поступило
24 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. N. Watson*, General Transforms. Proc. Lond. Math. Soc., v. 2, 35, 156 (1933). [2] *Е. Титчмарш*, Введение в теорию интегралов Фурье, М., 1948. [3] *В. А. Диткин, А. П. Прудников*, Интегральные преобразования. В сб.: Математический анализ, 1966. Итоги науки, М., 1967, стр. 7. [4] *Ф. Рисс, Б. Секефальви-Надь*, Лекции по функциональному анализу, М., 1948.