

УДК 517.9

МАТЕМАТИКА

Ю. Я. БЕЛОВ

**ОБ АППРОКСИМАЦИИ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ***(Представлено академиком Н. Н. Яненко 11 VII 1974)*

Систему уравнений в частных производных вида

$$\frac{\partial^k \hat{u}}{\partial t^k} = L(u) + f, \quad k=1, 2,$$

где $u = (u_1, \dots, u_n)$, $\hat{u} = (u_1, \dots, u_p, 0, 0, \dots, 0)$, $1 < p < n$, $f = (f_1, \dots, f_n)$, $L(u) = (L_1(u), \dots, L_n(u))$, $L_i(u)$ — некоторые дифференциальные операторы по пространственным переменным, будем называть полуэволюционной в отличие от эволюционной системы

$$\frac{\partial^k u}{\partial t^k} = L(u) + f.$$

Задача об аппроксимации полуэволюционных систем эволюционными возникла, в первую очередь, при численных расчетах различных задач течения вязкой несжимаемой жидкости, когда система уравнений Навье — Стокса заменяется некоторой эволюционной системой: обычно заменяется уравнение неразрывности $\operatorname{div} u = 0$ на некоторое эволюционное с малым параметром ε , причем в необходимых случаях «подправляются» и остальные уравнения системы так, чтобы решение u^ε аппроксимирующей системы сходилась при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению соответствующей задачи для исходной системы уравнений Навье — Стокса.

Идея указанной аппроксимации была впервые высказана в докладе Н. Н. Владимировой, Б. Г. Кузнецова, Н. Н. Яненко на семинаре по вычислительной математике и механике под руководством С. Л. Соболева и Г. И. Марчука (Новосибирск, 1965 г., см. ⁽¹⁾). Теоретическое обоснование различных способов аппроксимации дано в ^(2, 3) и последующих работах различных авторов. В линейном случае вопросы аппроксимации для некоторых уравнений исследовались в ^(4, 5). В настоящей работе рассматривается задача Коши для линейных полуэволюционных систем первого и второго порядков в гильбертовом пространстве на основании свойств аппроксимирующих эволюционных систем.

Обозначим через H гильбертово пространство над R со скалярным произведением (u, v) ; $H^2 = H \times H$ — гильбертово пространство векторов $u = \{u_1, u_2\}$, $u_i \in H$, со скалярным произведением $[u, v] = (u_1, v_1) + (u_2, v_2)$. A_{ij} — замкнутые линейные операторы в H с плотными в H областями определения $D(A_{ij})$, $i, j=1, 2$. $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ — линейный оператор в H^2 .

Через $D_1^{(k)}$ обозначим множество элементов из H , на которых определены все операторы вида $A_{i_1 j_1} A_{i_2 j_2} \dots A_{i_k j_k}$, $D^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} D_1^{(k)} \times D_1^{(k)} \cdot C^k([0, T]; H)$ — пространство k раз непрерывно дифференцируемых отображений $t \rightarrow \varphi(t)$,

$[0, T] \rightarrow H$, с нормой

$$\|\varphi\|_{C^k([0, T]; H)} = \sum_{m=0}^k \max_{0 \leq t \leq T} \left\| \frac{d^m \varphi(t)}{dt^m} \right\|_H, \quad \left\| \frac{d^m \varphi(t)}{dt^m} \right\|_H = \left(\frac{d^m \varphi(t)}{dt^m}, \frac{d^m \varphi(t)}{dt^m} \right)^{1/2}.$$

Рассмотрим аппроксимацию системами эволюционного типа

$$u_1' = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + f_1, \quad (1)$$

$$\varepsilon u_2' = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + f_2$$

системы

$$u_1' = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + f_1, \quad (2)$$

$$0 = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + f_2,$$

получающейся из (1) при $\varepsilon = 0$. Здесь $u_i' = du_i/dt$ — сильная производная от u_i по t в H . Систему (2) естественно назвать полуэволюционной.

Определение 1. Назовем вектор $u(t) \in H^2$ решением системы (2) на отрезке $[0, T]$, если выполняются условия:

1) значения вектора $u = \{u_1, u_2\}$ принадлежат области определения $D(A)$ оператора A при всех $t \in [0, T]$,

2) в каждой точке $t \in [0, T]$ существует сильная производная $u_i'(t)$ компоненты u_i вектора u (в норме H),

3) уравнение (2) удовлетворяется при всех $t \in [0, T]$.

Начальные данные для системы (2)

$$u(0) = x, \quad x \in D(A), \quad (3)$$

вследствие второго уравнения системы должны удовлетворять условию

$$A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + f_2(0) = 0. \quad (4)$$

Зададимся некоторыми целыми $\alpha > 2$, $\beta \geq 1$ и рассмотрим функции f такие, что $f(t) \in D^{(\alpha)}$, $0 \leq t \leq T$,

$$\left. \begin{aligned} &f_i, A_{ij}f_l, A_{ij}A_{ml}f_1, A_{12}A_{22}^{-1}f_2 \\ &A_{ij}A_{12}A_{22}^{-1}f_2, A_{ij}A_{ml}A_{12}A_{22}^{-1}f_2 \end{aligned} \right\} \in C^{\beta}([0, T]; H), \quad i, j, m, l = 1, 2, \quad (5)$$

т. е. $f(t)$ — достаточно «гладкий» элемент H^2 , $0 \leq t \leq T$, и достаточно гладкая по t функция в H^2 .

Определение 2. Задача (2), (3), (4) поставлена в H^2 на отрезке $[0, T]$ равномерно корректно, если при любых $x \in D(A)$ и f , удовлетворяющих условиям (4), (5), ее решение существует, единственно и из условия

$$\int_0^T \|f^{(n)}(t)\|_{H^2}^2 dt \rightarrow 0, \quad x_i^{(n)} \rightarrow 0 \text{ в } H$$

для решений $u^{(n)}$, соответствующих $x^{(n)}$, $f^{(n)}$, следует, что

$$\int_0^T \|u_2^{(n)}(t)\|_{H^2}^2 dt \rightarrow 0, \quad u_1^{(n)} \rightarrow 0 \text{ в } C^0([0, T]; H), \quad n \rightarrow \infty.$$

Здесь $x^{(n)}, f^{(n)}$ удовлетворяют условиям (4), (5), $x^{(n)} \in D(A)$.

Условие 1. Оператор A коэрцитивный:

$$[-Au, u] \geq \mu_1 \|u\|_{H^2}^2 \quad \forall u \in D(A), \quad \mu_1 > 0 - \text{const.}$$

Условие 2. Задача (1), (3), (4) имеет на отрезке $[0, T]$ единственное решение для любых ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, и функции f , удовлетворяющей предположению (5).

Условие 3. При $x \in D^{(k)}$, где $k > 2$ — некоторое натуральное число, и функции f , удовлетворяющей (5), на $u_i^e(t)$, $0 \leq t \leq T$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, коммутируют операторы d/dt , $A_{\alpha p}$, A_{ij} , $A_{\alpha p} A_{ml}$, α , p , i , j , m , $l=1, 2$. Здесь $u^e = \{u_1^e, u_2^e\}$ — решение задачи (1), (3), (4).

Условие 4. Оператор A_{22} имеет обратный линейный ограниченный оператор A_{22}^{-1} .

Теорема 1. Пусть f удовлетворяет (5), $x \in D^{(k)}$ и выполняются условия 1–4. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$u^e \rightarrow u \text{ в } C^0([0, T]; H^2), \\ A_{ij}u_j^e \rightarrow A_{ij}u_j \text{ в } C^0([0, T]; H), \quad i, j=1, 2,$$

где u^e — решение задачи (1), (3), (4), u — решение задачи (2), (3), (4).

Замечание. В случае, когда $f=0$, в теореме 1 условие 1 можно заменить требованием диссипативности оператора A :

$$[Au, u] \leq 0 \quad \forall u \in D(A).$$

Если $f_1 \neq 0$, $f_2 = 0$ ($f_1 = 0$, $f_2 \neq 0$), то вместо условия 1 достаточно потребовать, чтобы оператор A был представим в виде $A = A_1 + A_2$, причем оператор A_1 был диссипативным, а A_2 — удовлетворял условию $[A_2, u, u] \leq -\kappa \|z\|_H$, $\kappa > 0 = \text{const}$ для всех u из $D(A_2)$ таких, что $u = \{z, 0\}$ ($u = \{0, z\}$), $z \in H$.

Через X обозначим линейное пространство элементов $v \in D(A)$ таких, что $A_{21}v_1 + A_{22}v_2 = 0$. Пространство X с введенной на нем нормой

$$\|v\| = \|v\|_{H^2} + \sum_{i,j=1}^2 \|A_{ij}v_j\|_H$$

обозначим через V . V является банаховым пространством вследствие замкнутости операторов A_{ij} .

Условие 5. Множество $\bar{D}^{(k)}$, где $\bar{D}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} D^{(k)} \cap V$ плотно в V .

Теорема 2. При выполнении условий 1–5 задача (2), (3), (4) равномерно корректна в H^2 .

В случае аппроксимации системы

$$u_1'' = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + f_1, \\ 0 = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + f_2 \quad (6)$$

системами эволюционного типа

$$u_1'' = A_{11}u_1 + A_{12}u_2 + f_1, \\ \varepsilon u_2'' = A_{21}u_1 + A_{22}u_2 + f_2 \quad (7)$$

определение решения системы (6) дастся так же, как и определение решения системы (2), только во втором условии требуется существование в каждой точке $t \in [0, T]$ сильной производной $u_1''(t)$ компоненты u_1 вектора u . Начальные данные для системы (6)

$$u(0) = x, \quad u'(0) = y, \quad x, y \in D(A), \quad (8)$$

вследствие второго уравнения системы (6) должны удовлетворять соотношениям

$$0 = A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + f_2(0) = A_{21}y_1 + A_{22}y_2 + f_2'(0). \quad (9)$$

Определение 3. Задача (6), (8), (9) поставлена в H^2 на отрезке $[0, T]$ равномерно корректно, если при любых $x, y \in D(A)$ и f , удовлетворяющих условиям (9), (5), ее решение существует, единственно и из условия

$$x^{(n)} A x^{(n)} \rightarrow 0 \text{ в } H^2, \quad y_1^{(n)} \rightarrow 0 \text{ в } H,$$

$$f_i^{(n)}, A_{12}A_{22}^{-1}f_2^{(n)} \rightarrow 0 \text{ в } C^0([0, T]; H), \quad i=1, 2,$$

для соответствующих решений $u^{(n)}$ следует, что $u^{(n)} \rightarrow 0$ в $C^0([0, T]; H^2)$, $n \rightarrow \infty$. Здесь $x^{(n)}$, $y^{(n)}$, $f^{(n)}$ удовлетворяют условиям (5), (9), $x^{(n)}$, $y^{(n)} \in D(A)$.

У с л о в и е 6. Оператор A коэрцитивный и симметрический:

$$[-Au, u] \geq \mu_2 \|u\|_H^2 \quad \forall u \in D(A), \quad \mu_2 > 0 - \text{const},$$

$$[Au, v] = [u, Av] \quad \forall u, v \in D(A).$$

У с л о в и е 7. Задача (7), (8), (9) имеет на отрезке $[0, T]$ единственное решение для любых ε , $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, и функции $f = \{f_1, 0\}$ удовлетворяющей предположению (5).

У с л о в и е 8. При $x, y \in D^{(k)}$, где $k > 2$ — некоторое натуральное число, и функции $f = \{f_1, 0\}$, удовлетворяющей (5), на $u_i^\varepsilon(t)$, $0 \leq t \leq T$, $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$, коммутируют операторы d/dt , d^2/dt^2 , $A_{\alpha p}$, A_{ij} , $A_{\alpha p} A_{ml}$, α , p , i , j , m , $l = 1, 2$. Здесь $u^\varepsilon = \{u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon\}$ — решение задачи (7), (8), (9).

Т е о р е м а 3. Пусть f удовлетворяет (5), $x, y \in D^{(k)}$ и выполняются условия 4, 6–8. Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$u^\varepsilon \rightarrow u \text{ в } C^0([0, T]; H^2),$$

$$A_{ij} u_j^\varepsilon \rightarrow A_{ij} u_j \text{ в } C^0([0, T]; H), \quad i, j = 1, 2.$$

где u^ε — решение задачи (7), (8), (9), u — решение задачи (6), (8), (9).

Т е о р е м а 4. Пусть выполняются условия 4–8. Тогда задача (6), (8), (9) равномерно корректна в H^2 .

Красноярский государственный
университет

Поступило
8 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Н. Н. Владимирова, Б. Г. Кузнецов, Н. Н. Яненко, Сб. Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики, Новосибирск, 1966, стр. 186. ² J. L. Lions, Reduction à des problèmes du type Cauchy — Kowalewska, C. I. M. E., Ispra, juillet, 1967. ³ R. Temam, Arch. Rat. Mech. Anal., v. 32, 135 (1969); v. 33, 377 (1969). ⁴ Ю. Я. Белов, Сб. Численные методы механики сплошной среды, т. 1, № 6, Новосибирск, 1970, стр. 3. ⁵ Ю. Я. Белов, А. Н. Коновалов, Сб. Численные методы решения задач фильтрации несжимаемой жидкости, Новосибирск, 1972, стр. 44.