Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 4

УДК 517.554 МАТЕМАТИКА

С. К. ВОДОПЬЯНОВ, В. М. ГОЛЬДШТЕЙН

КРИТЕРИЙ УСТРАНИМОСТИ МНОЖЕСТВ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВ W_p^1 КВАЗИКОНФОРМНЫХ И КВАЗИИЗОМЕТРИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 22 VII 1974)

Эта заметка непосредственно связана с заметкой [1]. Исследуется введенный нами в рассмотрение [1] класс $(1, n)$-эквивалентных областей. Всякая функция u, принадлежащая $W_n^1(G_2)$, над некоторой фиксированной областью G_2 продолжается единственным образом на $(1, n)$-эквивалентную G_2 область G_1, $G_1 \supset G_2$, до функции $u' \in W_n^1(G_1)$. Следовательно, конформные емкости любой пары компактов F_0, $F_1 \subset G_2$ в областях G_1 и G_2 совпадают. Мы доказываем обратную теорему. Из нее и [1] следует устранимость множеств, «не влияющих» на емкость (NC_n-множеств), для квазиконформных отображений. В R^n класс NC_n множеств совпадает с NED [2, 3]. Устранимость NED-множеств для квазиконформных отображений недавно доказана [4] с использованием геометрической техники n-модулей.

Результаты переносятся на пространства W_p^1, $p>1$.

Как обычно, W_p^1 — пространство вещественных функций, определенных в области $G \subset R^n$ и имеющих обобщенные первые производные, суммируемые по G в степени p [5]. W_p^1 рассматривается с нормой

$$\|u\|_{W_p^1(G)} = \|u\|_{L_p(G)} + \|\nabla u\|_{L_p(G)}.$$

О п р е д е л е н и е 1. Две области G_1, $G_2 \subset R^n$ называются $(1, p)$-э к в и в а л е н т н ы м и, если отображения

$$\Theta_i:\ W_p^1(G_1 \cup G_2) \to W_p^1(G_i), \quad \Theta_i(u) = u/G, \quad i=1,\ 2,$$

являются изометрическими изоморфизмами.

О п р е д е л е н и е 2. Замкнутое относительно области G множество $E \subset G$ называется н у л е в ы м для конформной p-емкости, или NC_p-множеством, если

$$\mathrm{Cap}_p(G \setminus E,\ F_0,\ F_1) = \mathrm{Cap}_p(G,\ F_0,\ F_1)$$

для любых непересекающихся компактов F_0, $F_1 \subset G$; здесь

$$\mathrm{Cap}_p(G, F_0, F_1) = \inf \int_G |\nabla u|^p\, dx,$$

где инфимум берется по всем непрерывным функциям $u \in W_p^1(G)$, равным нулю на F_0 и единице на F_1.

Т е о р е м а 1. *Для того чтобы области G_1 и G_2, $G_1 \supset G_2$, были $(1, p)$-эквивалентными, необходимо и достаточно, чтобы множество $E = G_1 \setminus G_2$ было NC_p-множеством.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Н е о б х о д и м о с т ь легко следует из определений, и рассуждений в начале заметки.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Всякая ограниченная функция $f \in W_p^1(G_2)$ представима в виде суммы $f = u + g$ непрерывной функции u, являющейся решением некоторой задачи Дирихле ([6]), и функции $g \in W_p^1(G_2)$, продолжающейся на E без изменения нормы.

Выберем два произвольных вещественных числа a, b,

$$\min_{x \in G_2} u(x) < a < b < \max_{x \in G_2} u(x).$$

Аппроксимируем открытые множества

$$V_a = \{x \in G\colon u(x) < a\}, \quad W_b = \{x \in G\colon u(x) > b\}$$

возрастающими последовательностями компактов $\{V_m\}$, $\{W_m\}$. Экстремальные функции v_m для $\mathrm{Cap}_p(G_2, V_m, W_m)$ продолжаются до экстремалей v_m' для $\mathrm{Cap}_p(G_1, V_m, W_m)$, так как $E - NC_p$-множество.

Последовательность $\{v_m\}$ равномерно ограничена и имеет равномерно ограниченный интеграл Дирихле

$$\int_{G_2} |\nabla u|^p \, dx \geqslant \int_{G_2} |\nabla v_m|^p \, dx = \int_{G_1} |\nabla v_m'|^p \, dx. \tag{1}$$

Выделяем из $\{v_m'\}$ слабо сходящуюся подпоследовательность. Ее предел $v_a^b \in W_p^1(G_1)$ равен нулю на V_a и единице на W_b.

Для любого разбиения $\tau = \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$,

$$a_0 = \min_{x \in G_2} u|x| < a_1 < \ldots < a_k < \max_{x \in G_2} u(x) = a_{k+1},$$

строим функцию

$$v_{\mathcal{T}} = a_1 + (a_2 - a_1) v_{a_1}^{a_2} + \ldots + (a_k - a_{k-1}) v_{a_{k-1}}^{a_k}.$$

Учитывая (1), имеем

$$|u - v_{\mathcal{T}}| < \max_{i=0,1,\ldots,k} (a_{i+1} - a_i) = \operatorname{diam} \mathcal{T},$$

$$\int_{G_2} |\nabla u|^p \, dx \geqslant \int_{G_1} |\nabla v_{\mathcal{T}}|^p \, dx. \tag{2}$$

Выберем сжимающуюся последовательность разбиений $\{\mathcal{T}_\nu\}$ ($\operatorname{diam} \mathcal{T}_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$). Последовательность функций $\{v_\nu\}$ равномерно сходится к u на G_2. Интегралы Дирихле этой последовательности равномерно ограничены. Выделяем из $\{v_\nu\}$ слабо сходящуюся подпоследовательность. Ее предел u' совпадает на G_2 с функцией u.

Из (2) следует

$$\int_{G_2} |\nabla u|^p \, dx = \int_{G_1} |\nabla u'|^p \, dx. \tag{3}$$

С помощью (3) доказываем равенство нулю меры множества E. Следовательно, $\|u'\|_{W_p^1(G_1)} = \|u\|_{W_p^1(G_2)}$. Теорема доказана.

Следствие 1. *Любое замкнутое подмножество NC_p-множества является NC_p-множеством.*

Следствие 2. (принцип локализации). *Если $E - NC_p$-множество в области G, то для любого шара $B(x, r) \subset G$, множество $E_1 = E \cap B(x, r)$ является NC_p-множеством.*

Следствие 3. *Всякое компактное подмножество NC_p-множества в области G является NC_p-множеством в любой области.*

Следствие 4. *Пусть E — такое замкнутое подмножество области G, что пересечение E с любым шаром $B \subset G$ является NC_p-множеством в B. Тогда $E - NC_p$-множество в области G.*

Теорема 2. *Пусть G — область в R^n, $E - NC_n$-множество в области G.*

Тогда всякое квазиконформное отображение φ: $G\setminus E\to R^n$ ***продолжается*** *до квазиконформного отображения* φ': $G\to R^n$ *без* ***изменения коэффициента*** *искажения.*

Теорема 2 следует из теоремы 1 и работы ([1]).

Теорема 3. *Пусть* G — *область в* R^n, E—NC_n*-множество в* G *и* φ — *квазиконформное отображение области* G *на область* G'.

Тогда $\varphi(E)$ — NC_n*-множество в* G'.

Теорема 3 легко следует из теорем 1, 2.

Теорема 4. *Пусть* G — *область в* R^n, E—NC_n*-множество в* G, φ: $G\setminus E\to R^n$ — *отображение с ограниченным искажением. Предполагаем, что для каждой точки* $x\in E$ *существует шар* $B(x, r)\subset G$, *такой, что* $\varphi\in\in W_n^1(B(x, r))$.

Тогда существует единственное продолжение φ *до отображения с ограниченным искажением* φ': $G\to R^n$.

При $p\neq n$ конформная p-емкость является квазиинвариантом для квазиизометрических отображений ([8]). Для квазиизометрий верны аналоги теорем 2, 3.

Теорема 5. *Всякое* NC_{p_1}*-множество* E *в области* G, ***является*** NC_p*-множеством в* G *при* $p>p_1$.

Теорема 5 следует из теоремы 1 и принципа локализации.

Выясним связь NC_n-множеств с NED-множествами.

Определение 3. Замкнутое относительно области G множество E будем называть NED_p-множеством, если для любых связных компактов F_0, F_1, принадлежащих $G\setminus E$,

$$\mathrm{Cap}_p(G\setminus E,\ F_0,\ F_1)=\mathrm{Cap}_p(G,\ F_0,\ F_1).$$

При $p=n$ и $G=R^n$ из работы ([9]) следует совпадение класса NED_n с классом NED.

Теорема 6. *Для любой области* G *класс* NED_p*-множеств совпадает с классом* NC_p*-множеств.*

Доказательство. При доказательстве теоремы 1 достаточно использовать совпадение емкостей

$$\mathrm{Cap}_p(G\setminus E,\ F_0,\ F_1)=\mathrm{Cap}_p(G,\ F_0,\ F_1)$$

для любых компактов F_0, $F_1\subset G\setminus E$, имеющих конечное число связных компонент, каждая из которых имеет гладкую границу.

Доказательство проводится индукцией по числу компонент $\nu(F_0,\ F_1)$ множеств F_0, F_1, используя на каждом этапе суженный на этот класс результат теоремы 1.

Теорема 7. *Для того чтобы замкнутое относительно* G *множество* E *было* NC_p*-множеством в* G, *необходимо и достаточно, чтобы для любых двух связных компактных множеств* F_0, $F_1\subset G\setminus E$, $F_0\cap F_1=\phi$, *имеющих гладкую границу, было справедливо равенство*

$$\mathrm{Cap}_p(G\setminus E,\ F_0,\ F_1)=\mathrm{Cap}_p(G,\ F_0,\ F_1).$$

Авторы пользуются случаем выразить благодарность В. В. Асееву и А. П. Копылову за полезные консультации.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
9 VIII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *С. К. Водопьянов, В. М. Гольдштейн*, ДАН, т. 215, № 1, 24 (1974). [2] *L. Ahlfors, A. Beeurling*, Acta Math., v. 83, № 1–2, 100 (1950). [3] *J. Väisälä*, Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A, v. 322, 1 (1962). [4] *В. В. Асеев*, Динамика сплошной среды, в. 16, Новосибирск, 1974. [5] *С. Л. Соболев*, Некоторые применения функционального анализа в математической физике, Л., 1950. [6] *О. А. Ладыженская, Н. М. Уральцева*, Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа, М., 1973. [7] *Ю. Г. Решетняк*, Сиб. Матем. журн., т. 7, № 3, 629 (1967). [8] *F. W. Gehring*, Proc. Symp. Pure Math., 20, 1971. [9] *W. P. Zoemer*, Trans. A. M. S., v. 126, № 3, 460 (1967).