

Академик И. И. АРТОБОЛЕВСКИЙ, Ю. И. БОБРОВНИЦКИЙ, М. Д. ГЕНКИН

КОЛЕБАНИЯ ОДНОРОДНЫХ СТРУКТУР ИЗ ТОНКИХ ПОЛОС

Проектирование инженерных конструкций, обладающих оптимальными акустическими характеристиками, связано с расчетом на колебания простейших составных элементов и их соединений⁽¹⁾. Одним из наиболее распространенных составных элементов является упругая полоса, толщина которой значительно меньше ее ширины. Многие практические конструкции, однородные в одном из направлений, составляются из полос. Таковы тонкостенные стержни, отдельные элементы корпусов судов и летательных аппаратов. Здесь приводится новый метод расчета колебаний таких конструкций.

1. Тонкая упругая полоса представляет собой простейший твердый волновод. В ней могут существовать волны двух типов — изгибные и продольно-поперечные (в плоскости полосы). В силу малой толщины полосы эти волны описываются динамическими уравнениями плоского напряженного состояния, уравнением динамического изгиба Жермен — Лагранжа и граничными условиями на кромках. Если кромки полосы свободны от напряжений, продольно-поперечные волны аналогичны волнам Лэмба в упругом слое⁽²⁾. Исследование распространения волн в полосе и ее вынужденных колебаний при различных граничных условиях проведено в работе⁽³⁾.

2. Предлагаемый метод расчета представляет собой обобщение метода линейных динамических жесткостей, разработанного в⁽⁴⁾ для задач отражения волн в пластинах от линейных препятствий, на случай однородных конструкций, составленных из полос.

Для простоты рассмотрим бесконечный уголкового стержень, который состоит из двух полос, соединенных под прямым углом по линии, совпадающей с осью z . В силу однородности структуры вдоль оси z в ней возникают движения вида $u(x, y, z) = u(x, y) \exp(ikz - i\omega t)$, называемые нормальными волнами, где k — постоянная распространения, ω — круговая частота, u — вектор смещений точек стержня. При распространении вдоль стержня нормальной волны по линии соединения $x=y=0$ возникают силы и моменты сил реакции, которые, как и смещения, зависят от координаты z экспоненциально.

Обозначим через $F_i(z) = F_i \exp(ikz - i\omega t)$ четырехмерный вектор, компонентами которого являются силы реакции в направлении трех осей координат и z -я компонента изгибающего момента, действующие на i -ю полосу, $i=1, 2$. Распространение нормальной волны в стержне эквивалентно вынужденным колебаниям отдельных полос под действием $F_i(z)$. Как показано в^(4, 5), решение для вынужденных колебаний можно записать в виде $F_i = C_i u_i$, где u_i — четырехмерный вектор, компонентами которого являются амплитуды смещения в направлении трех осей координат и угла поворота вокруг оси z на линии соединения полос, C_i — квадратная матрица четвертого порядка, элементами которой являются линейные динамические жесткости, представляющие собой отношение амплитуды силы к амплитуде смещения или амплитуды момента сил к амплитуде угла поворота при экспоненциальном распределении сил и моментов сил вдоль прямой линии ($x=y=0$).

На линии соединения смещения полос одинаковы, а сумма сил и моментов сил реакции равна нулю: $u_1 = u_2$, $F_1 + F_2 = 0$. Из этих условий и из выражений для вынужденных колебаний полос непосредственно вытекает дисперсионное уравнение нормальных волн в угловом стержне $|C_1 + C_2| = 0$, устанавливающее зависимость постоянной распространения k от частоты ω .

Таким образом, точное дисперсионное уравнение волн в угловом стержне представляет собой равный нулю определитель четвертого порядка, элементами которого являются линейные динамические жесткости двух его составляющих полос. Для тонкостенных стержней других поперечных сечений процедура получения дисперсионных уравнений аналогична. Если поперечное сечение стержня обладает симметрией, дисперсионное уравнение распадается на два или несколько более простых уравнений. В случае двутаврового стержня с одинаковыми полками имеются две плоскости симметрии. Дисперсионное уравнение здесь распадается на четыре отдельных уравнения. Физически это означает, что четыре типа нормальных волн в таком стержне (продольные, крутильные и два типа изгибных) распространяются независимо одна от другой.

Для изгибных нормальных волн в плоскости полосы-стенки, например, дисперсионное уравнение имеет вид

$$(C_{nn}^a + 2C_{ll}) (C_{nn}^a + 2C_{ll}) - C_{ln}^a C_{ml}^a = 0, \quad (1)$$

где C_{nn}^a , C_{ml}^a и $C_{ll}^a = -C_{ml}^a$ — линейные продольно-поперечные жесткости стенки при антисимметричном возбуждении ее силами, экспоненциально распределенными на кромках ⁽⁵⁾, C_{ll} — линейная продольно-поперечная жесткость полки-полосы при действии силы, распределенной экспоненциально по центральной линии и направленной вдоль нее, C_{nn} — линейная изгибная жесткость полки при действии перерезывающей силы, распределенной по экспоненте вдоль центральной линии. Величины C_{ll} и C_{nn} без труда вычисляются с помощью результатов работы ⁽⁵⁾.

На любой частоте уравнение (1) дает для постоянной распространения k бесконечное множество корней, из которых все, исключая конечное число, комплексны. Соответствующие им нормальные изгибные волны являются неоднородными и затухают с расстоянием. При стремлении размеров полки к нулю ($C_{nn} = C_{ll} = 0$) уравнение (1) переходит в дисперсионное уравнение Рэлея — Лэмба ⁽²⁾.

Если левую часть (1) разложить в ряд Маклорена и пренебречь членами высокого порядка, придем к дисперсии, определяемой классическим уравнением изгибных колебаний Бернулли — Эйлера. Сохранение членов разложения следующего порядка малости соответствует приближенному уравнению типа С. П. Тимошенко.

Изложенный метод расчета, основанный на получении точных дисперсионных зависимостей нормальных волн в тонкостенных стержнях и других однородных структурах, составленных из полос, целесообразен при исследовании их колебаний в высокочастотной области, где известные приближенные теории неверны.

Государственный научно-исследовательский институт машиноведения
Москва

Поступило
28 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ И. И. Артоболевский, М. Д. Генкин, В. И. Сергеев, Вестн. АН СССР, т. 11, 50 (1968). ² Физическая акустика, т. 4, ч. А, М., 1966. ³ Виброакустические процессы в машинах и присоединенных конструкциях, М., 1974. ⁴ Распространение волн в конструкциях из тонких стержней и пластин, М., 1974. ⁵ Ю. И. Бобровицкий, М. Д. Генкин, В. И. Маслов, Сб.: Виброакустическая активность механизмов с зубчатыми передачами, М., 1971.