

Б. И. ПЛОТКИН, Л. Е. КРОП, Л. А. СИМОЯН

**НЕКОТОРЫЕ СВЯЗИ МЕЖДУ ГРУППОВЫМИ МНОГООБРАЗИЯМИ
И МНОГООБРАЗИЯМИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП**

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 12 V 1974)

1. Под представлением группы мы здесь понимаем пару (A, Γ) , где A — модуль над некоторым коммутативным кольцом с единицей K и Γ — группа, для которой задано действие в A в качестве группы автоморфизмов. Пусть, далее, $u = u(y_1, \dots, y_n)$ — элемент групповой алгебры K^F , где F — свободная группа счетного ранга над множеством Y . Для каждой группы Γ имеем элементы $u(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in K\Gamma$, $\gamma_i \in \Gamma$. Если все такие элементы аннулируют модуль A в представлении (A, Γ) , то говорят, что в данном представлении выполняется тождество $x \cdot u(y_1, \dots, y_n) = 0$. Многообразие пар — представлений — это класс пар, определяемый некоторым набором таких тождеств (см., например, (3)).

Если \mathfrak{X}_1 и \mathfrak{X}_2 — два многообразия над заданным K , то их произведение $\mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$ определяется условием: $(A, \Gamma) \in \mathfrak{X}_1 \mathfrak{X}_2$, если в A имеется $K\Gamma$ -подмодуль B с $(B, \Gamma) \in \mathfrak{X}_1$ и $(A/B, \Gamma) \in \mathfrak{X}_2$. Так возникает полугруппа многообразий представлений над данным K , обозначаемая через $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(K)$. \mathfrak{M} обладает нулем и единицей — многообразие всех пар и многообразие пар с нулевой областью действия A . В общем случае в \mathfrak{M} могут быть делители нуля, однако, если K — область, все элементы из \mathfrak{M} , отличные от нуля и единицы, также составляют полугруппу — полугруппу собственных многообразий. Часто под \mathfrak{M} будем понимать эту собственную часть. Если, далее, \mathfrak{X} — многообразие пар и θ — групповое многообразие, то $\mathfrak{X} \times \theta$ — класс пар, определяемый правилом: $(A, \Gamma) \in \mathfrak{X} \times \theta$, если в Γ имеется нормальный делитель Σ с $\Gamma/\Sigma \in \theta$ и $(A, \Sigma) \in \mathfrak{X}$. Это также многообразие, причем собственное, если таковы \mathfrak{X} и θ . Кроме того, операция \times определяет представление полугруппы групповых многообразий — обозначим ее через \mathfrak{N} — в качестве полугруппы эндоморфизмов полугруппы \mathfrak{M} . Таким образом, возникает полугрупповая пара $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Эта пара рассматривается в (4), где доказывается, что если K — поле, то с точностью до нулей и единиц в \mathfrak{M} и \mathfrak{N} пара $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ свободна.

Пусть теперь \mathfrak{M}_0 — некоторая мультипликативная система многообразий представлений — подполугруппа в \mathfrak{M} . Ее нормализатором (в \mathfrak{N}) называется система всех групповых многообразий θ , для которых $\mathfrak{X} \times \theta \in \mathfrak{M}_0$, как только $\mathfrak{X} \in \mathfrak{M}_0$. Обращение к нормализатору полезно по многим поводам. Во-первых, это дает редукции для многообразий из \mathfrak{M}_0 к многообразиям «без групповых составляющих». Во-вторых, здесь возможны приложения к групповым многообразиям, о которых мы в дальнейшем скажем. Наконец, следующее соображение. Как известно, между некоторыми многообразиями представлений и групповыми многообразиями имеются естественные параллели. Так, например, понятие нильпотентности для групп параллельно понятие стабильности в представлениях, и это ведет к сопоставлению различных групповых многообразий нильпотентного типа и многообразий представлений стабильного типа. Такие сопоставления часто переходят в прямые связи, и язык нормализаторов здесь одно из средств установления этих связей. Соответствующие примеры будут приведены ниже.

Отметим, далее, что через нормализаторы устанавливается связь между полугруппами многообразий представлений и полугруппами групповых многообразий. С другой стороны, имеются различные связи между индивидуальными многообразиями. Некоторые из них будут здесь рассмотрены.

2. Полугрупповые пары. Имея в виду пару $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$, приведем несколько общих замечаний о категории полугрупповых пар. Пусть Σ — моноид и допустим, что Σ действует в качестве моноида преобразований на множестве M . При этом M есть полигон над Σ и можно говорить о категории полигонов с данным Σ . Меняя Σ , будем рассматривать и пары (M, Σ) , которые назовем здесь акциями. Морфизмы категории акций — это гомоморфизмы вида $\mu: (M, \Sigma) \rightarrow (M', \Sigma')$, где $\mu: M \rightarrow M'$ — отображение, $\mu: \Sigma \rightarrow \Sigma'$ — гомоморфизм моноидов и они связаны условием $(a\sigma)^\mu = a'^\mu \sigma'^\mu$, $a \in M$, $\sigma \in \Sigma$. Пусть (M, Σ) — акция, a, b — элементы в M . Условимся говорить, что a — Σ -делитель b , или короче, a — делитель b , если $b = a\sigma$ при некотором $\sigma \in \Sigma$. Следующее предложение проверяется непосредственно.

Предложение 1. *Следующие свойства акции (M, Σ) эквивалентны:*

- а) (M, Σ) — свободная акция в категории акций.
- б) Σ — свободный моноид и M — свободный Σ -полигон.
- в) Действие Σ в M удовлетворяет следующим условиям:

1) множество M непусто; 2) для любого $\sigma \in \Sigma$, отличного от единицы ε и любого $a \in M$ элемент $a\sigma$ не является делителем a ; 3) $a\sigma = b\sigma \Rightarrow a = b$ и $a\sigma_1 = a\sigma_2 \Rightarrow \sigma_1 = \sigma_2$ при любых $a, b \in M$, $\sigma_1, \sigma_2 \in \Sigma$; 4) $a\sigma_1 = b\sigma_2$ влечет $a = b$ или $a = b\sigma$ или $b = a\sigma$; 5) каждый $a \in M$ имеет лишь конечное число делителей.

Акцию (H, Σ) будем называть полугрупповой парой, если H — полугруппа и элементы из Σ действуют в H как эндоморфизмы этой полугруппы. Очевидным образом возникает категория полугрупповых пар.

Предложение 2. *Полугрупповая пара (H, Σ) тогда и только тогда свободна, когда H — свободная полугруппа, множество ее неразложимых элементов M инвариантно относительно Σ и акция (M, Σ) свободна.*

Приведем теперь критерий свободы подпары полугрупповой пары.

Предложение 3. *Подпара (H_1, Σ_1) свободной полугрупповой пары (H, Σ) тогда и только тогда свободна, когда выполнены следующие условия: 1) H_1 — свободная полугруппа; 2) множество неразложимых элементов из H_1 инвариантно относительно Σ_1 ; 3) если a в (H_1, Σ_1) имеет место $a\sigma_1 = b\sigma_2$, то $a = b$ или $a = b\sigma$ или $b = a\sigma$, причем $\sigma \in \Sigma_1$.*

Отметим один специальный случай свободной подпары в свободной полугрупповой паре. Пусть (M, Σ) — акция и M_1 — подмножество в M . Нормализатор M_1 в Σ — это множество всех $\sigma \in \Sigma$, для которых выполняется $a \in M_1 \Rightarrow a\sigma \in M_1$. Можно также говорить и о конормализаторе как о множестве всех $\sigma \in \Sigma$, для которых имеет место $a\sigma \in M_1 \Rightarrow a \in M_1$. Множество M_1 назовем изолированным в (M, Σ) , если его конормализатор совпадает со всей Σ .

Предложение 4. *Пусть (H, Σ) — свободная полугрупповая пара, H_1 — свободная и изолированная подполугруппа в H и Σ_1 — нормализатор этой подполугруппы. Тогда пара (H_1, Σ_1) свободна.*

3. Подпары в $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$. Ситуация поля. В этом пункте K — поле, \mathfrak{M} состоит из собственных многообразий представлений над K , \mathfrak{N} — все групповые многообразия кроме многообразия всех групп. Полугрупповая пара $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ свободна. Если \mathfrak{M}_0 — подполугруппа в \mathfrak{M} , то \mathfrak{N}_0 всегда обозначает ее нормализатор.

Многообразие пар \mathfrak{X} условимся называть финитарным многообразием, если оно порождается некоторым классом конечномерных представлений. Групповое многообразие финитарно, если это многообразие порождается некоторым классом конечных групп.

Теорема 1. *Совокупность \mathfrak{M}_0 всех финитарных многообразий представлений над данным полем K есть свободная и изолированная полу-*

группа. Ее нормализатор \mathfrak{N}_0 состоит из групповых финитарных многообразий и пара $(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0)$ свободна.

Многообразие \mathfrak{X} назовем локально ограниченным многообразием, если каждое конечно-порожденное представление из \mathfrak{X} конечномерно. При этом представление (A, Γ) конечно-порожденное, если Γ имеет конечное число образующих и A есть конечно-порожденный $K\Gamma$ -модуль.

Теорема 2. *Совокупность \mathfrak{M}_0 всех локально ограниченных многообразий представлений есть свободная изолированная полугруппа. Ее нормализатор \mathfrak{N}_0 состоит из локально-конечных групповых многообразий. Пара $(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0)$ свободна.*

Групповое многообразие θ назовем p -финитарным, если θ порождается некоторым классом конечных p -групп. Здесь p — фиксированное простое число. θ называется многообразием лиевского типа, или, короче, L -многообразием, если это многообразие порождается некоторым классом нильпотентных групп без кручения. Многообразие представлений \mathfrak{X} назовем L -многообразием, если \mathfrak{X} порождается некоторым классом стабильных пар.

Теорема 3. *Совокупность \mathfrak{M}_0 всех L -многообразий представлений над данным K есть свободная и изолированная полугруппа, и, следовательно, пара $(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0)$ свободна. Если K — поле простой характеристики p , то нормализатор \mathfrak{N}_0 состоит из всех p -финитарных групповых многообразий. Если $K=Q$ — поле рациональных чисел, то \mathfrak{N}_0 есть совокупность всех групповых L -многообразий.*

Доказательство последнего утверждения использует естественные связи между L -многообразиями представлений групп и многообразиями представлений лиевых алгебр. По-видимому, здесь удастся также освободиться от условия $K=Q$ и доказать соответствующее свойство для любого поля нулевой характеристики. Что касается других доказательств, то здесь учитывается предыдущий пункт и важную роль играет предложение, которое сейчас сформулируем.

Гомоморфизм представлений $\mu: (A, \Gamma) \rightarrow (A', \Gamma')$ называется правым гомоморфизмом, если $\mu: A \rightarrow A'$ — изоморфизм. Класс представлений \mathfrak{X} назовем насыщенным классом, если для каждой пары (A, Γ) из того, что некоторый правый гомоморфизм образ этой пары принадлежит \mathfrak{X} , следует, что и сама (A, Γ) принадлежит \mathfrak{X} . Легко понять, что произведение насыщенных классов представлений снова насыщенный класс. Через $\text{Var } \mathfrak{X}$ обозначается многообразие, порожденное классом \mathfrak{X} .

Предложение 5. *Отображение $\mathfrak{X} \mapsto \text{Var } \mathfrak{X}$ есть эпиморфизм полугруппы всех насыщенных классов пар на полугруппу многообразий.*

Доказательство этого предложения использует технику треугольных произведений пар ^(2, 3). Оно доказано также С. М. Вовси.

В качестве следствия из теоремы 3 имеем, что все групповые L -многообразия составляют свободную полугруппу. Подобные утверждения можно вывести и из двух других теорем. Это, конечно, можно доказывать и непосредственно.

Как обычно, многообразие \mathfrak{X} называется конечно-базируемым, если это многообразие может быть задано конечным числом тождеств. Легко доказать, что если \mathfrak{M}_0 — совокупность всех конечно-базируемых многообразий, то \mathfrak{M}_0 есть свободная и изолированная полугруппа. Поэтому свободна и пара $(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0)$. Что касается нормализатора \mathfrak{N}_0 , то он пока не найден. Возможно, что \mathfrak{N}_0 состоит лишь из единицы полугруппы \mathfrak{N} .

4. Целочисленный случай. Здесь $K=Z$ и пара $(\mathfrak{M}, \mathfrak{N})$ определяется, как и в предыдущем пункте. Многообразие пар \mathfrak{X} над Z называется L -многообразием, если \mathfrak{X} порождается набором стабильных пар (A, Γ) , в которых A — абелева группа без кручения. Это понятие, очевидно, параллельно понятию группового L -многообразия.

Теорема 4. *Совокупность \mathfrak{M}_0 всех L -многообразий представлений над кольцом целых чисел Z есть полугруппа, изоморфная подсобной полу-*

группе над Q . Нормализатор \mathfrak{N}_0 полугруппы \mathfrak{M}_0 состоит из всех групповых L -многообразий и пара $(\mathfrak{M}_0, \mathfrak{N}_0)$ свободна.

Определяемые далее магнусовы многообразия представлений есть частный случай L -многообразий и они параллельны магнусовым многообразиям групп. Представление (A, Γ) называется магнусовым, если нижний стабильный ряд в A на первом предельном месте доходит до нуля и все факторы этого ряда являются свободными абелевыми группами. Многообразии \mathfrak{X} магнусовы, если магнусовы все свободные пары из \mathfrak{X} . Для магнусовых многообразий представлений мы не имеем пока теоремы, подобной предыдущей теореме, и здесь можно лишь высказать гипотезу, что все такие многообразия составляют полугруппу, что нормализатор этой полугруппы совпадает с полугруппой групповых магнусовых многообразий и что соответствующая полугрупповая пара свободна.

Пусть, далее, θ — многообразие групп. Через $\omega\theta$ обозначается класс пар, определяемый правилом: $(A, \Gamma) \in \omega\theta$, если соответствующее точное представление $(A, \bar{\Gamma})$ имеет действующую группу $\bar{\Gamma}$, принадлежащую θ . Кроме того через $\omega'\theta$ обозначается класс пар (A, Γ) таких, что если $(A, \bar{\Gamma})$ — соответствующая точная пара, то отвечающее этой паре полупрямое произведение $A \lambda \bar{\Gamma}$ принадлежит θ . При любом θ классы $\omega\theta$ и $\omega'\theta$ являются многообразиями пар, причем $\omega'\theta$ есть собственное подмногообразие в $\omega\theta$. Оба эти оператора ω и ω' уже встречались, и они находят различные приложения.

Учитывая результаты работы (4), легко доказать, что если θ — магнусово групповое многообразие, то $\omega\theta$ есть магнусово многообразие представлений. По-видимому, здесь верно и обратное утверждение, однако доказательством его мы не располагаем. Кажется правдоподобной также гипотеза о том, что при любом магнусовом θ многообразии $\omega'\theta$ также магнусово. Эта гипотеза подтверждается на некоторых частных случаях. Один из них следующий.

Теорема 5. Для каждого полинильпотентного многообразия θ многообразии представлений $\omega'\theta$ является магнусовым многообразием.

Полинильпотентное групповое многообразие — это многообразие, являющееся произведением нильпотентных многообразий типа \mathfrak{N}_c . Известно (5), что все такие многообразия магнусовы.

Доказательство теоремы 5 использует специальную технику. Применяется следующее соотношение:

$$\omega'(\theta_1\theta_2) = (\omega'\theta_1 \times \theta_2) \omega'\theta_2.$$

Рассмотрим, далее, отображение τ , в известном смысле обратное отображению ω' . Пусть \mathfrak{X} — некоторое многообразие представлений над кольцом K . Через $\tau\mathfrak{X}$ обозначим класс групп, определяемый следующим образом: $\Gamma \in \tau\mathfrak{X}$, если $\Gamma = A \lambda \Sigma$, где (A, Σ) — некоторая точная пара в \mathfrak{X} . Пусть еще \mathfrak{X} обозначает класс групп, допускающих точное представление в многообразии \mathfrak{X} .

Предложение 6. При любом K и для любого многообразия пар \mathfrak{X} над K имеет место соотношение $s(\tau\mathfrak{X}) = \overline{\mathfrak{X}\mathcal{P}}$.

Здесь \mathcal{P} — многообразие пар с тривиальным действием (битожество $x^\circ(y-\varepsilon) = 0$) и s — оператор взятия подгрупп. Класс $\overline{\mathfrak{X}\mathcal{P}}$ всегда является групповым квазимногообразием, и многообразие, порожденное этим классом, есть $Q\overline{\mathfrak{X}\mathcal{P}}$, Q — оператор взятия гомоморфных образов.

Предложение 7. Если при некоторых \mathfrak{X} и θ имеет место $\mathfrak{X} = \omega'\theta$, то выполняется также и $\mathfrak{X} = \omega'(Q\overline{\mathfrak{X}\mathcal{P}})$, и $Q\overline{\mathfrak{X}\mathcal{P}} \subset \theta$.

Это предложение непосредственно следует из предыдущего.

Поступило
6 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Б. И. Плоткин, Сиб. матем. журн., т. 13, № 5, 1030 (1972). ² Б. И. Плоткин, Тр. рижск. алгебраич. семинара, в. 2, 140 (1971). ³ Б. И. Плоткин, А. С. Гринберг, Сиб. матем. журн., т. 13, № 4, 841 (1972). ⁴ В. Hartley, Proc. London Math. Soc., v. 20, № 3, 365 (1970). ⁵ А. Л. Шмелькин, Тр. Московск. матем. общ., т. 29, 247 (1973).