Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 5

УДК 519.214.9 *МАТЕМАТИКА*

А. И. САХАНЕНКО

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ В ПРИНЦИПЕ ИНВАРИАНТНОСТИ

(Представлено академиком Ю. В. Прохоровым 7 VI 1974)

Пусть $\{\xi_1^{(n)},\ldots,\xi_k^{(n)}\}$, $n=1,2,\ldots$, последовательность серий независимых случайных величин, удовлетворяющих условиям

$$\mathbf{M}\xi_k^{(n)}=0,\quad DS_n^{(n)}=1,\quad S_k^{(n)}=\sum_{j=1}^k \xi_j^{(n)}.$$

Обозначим $s_n(t)$ случайную ломаную на отрезке $[0, 1]$ с вершинами в точках $(t_k^{(n)}, S_k^{(n)})$, $k=0,1,\ldots,n$, где $t_k^{(n)}=\mathbf{D}S_k^{(n)}$, $S_0=t_0=0$. Как известно (см, например, [1]), если выполнено условие Ляпунова

$$L_s^{(n)}\equiv\sum_{k=1}^n \mathbf{M}|\xi_k^{(n)}|^s\to 0$$

при $n\to\infty$ и некотором $s>2$, то распределение P_n процесса s_n в метрическом пространстве $C=C(0, 1)$ слабо сходится при $n\to\infty$ к распределению W стандартного винеровского процесса $w=w(t)$, $0\leqslant t\leqslant 1$. В настоящей заметке изучается вопрос о скорости этой сходимости.

1. Оценки для расстояния между мерами. Пусть ρ есть метрика в C, а H — σ-алгебра борелевских множеств. Обозначим $G_\varepsilon(B)=\{x\colon (\exists y\in B)(\rho(x, y)<\varepsilon)\}$. Тогда, если P и Q — две меры в (C, H), то расстояние Леви — Прохорова $L(P, Q)$ между P и Q определяется следующим образом: $L(P, Q)<\varepsilon$, если для всех $B\in H$ справедливы неравенства

$$P(B)\leqslant Q(G_\varepsilon(B))+\varepsilon,\quad Q(B)\leqslant P(G_\varepsilon(B))+\varepsilon.$$

Первые оценки для расстояния $L(P_n, W)$, определенного для мер в пространстве C с равномерной метрикой $\rho_C(x, y)\equiv\sup\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)-y(t)|$ (это расстояние мы будем обозначать $L_C(P_n, W)$) были получены Ю. В. Прохоровым в [2], где было установлено, что

$$L_C(P_n, W)=o((L_3^{(n)})^{1/4}|L_3^{(n)}|^2).$$

В дальнейшем задача получения оценок для $L_C(P_n, W)$ изучалась многими авторами. Наиболее сильный результат принадлежит, по-видимому, А. А. Боровкову (см. [3]), который показал, что

$$L_C(P_n, W)\leqslant c_1(L_3^{(n)})^{1/(s+1)}\text{ при } 2<s\leqslant 3 \tag{1}$$

(здесь и ниже малые буквы c с индексами обозначают некоторые абсолютные постоянные). Приводимая ниже теорема 1 показывает, что эта оценка является в некотором смысле неулучшаемой.

Обозначим

$$z_n=\sup\left\{z\colon\ z\leqslant\sum_{k=1}^{n}\mathbf{P}(|\xi_k^{(n)}|\geqslant z)\right\},\qquad d_n=\max_{1\leqslant k\leqslant n}\mathbf{D}\xi_k^{(n)}.$$

Теорема 1.

$$L_C(P_n,\ W)\geqslant\max\{z_n/4,\quad \sqrt{d_n|\ln d_n|}/4\}.$$

Заметим, что в силу неравенства Чебышева

$$z_n\leqslant L_s^{(n)}/z_n{}^s,\quad s_n\leqslant(L_s^{(n)})^{1/(s+1)}. \tag{2}$$

Однако если найти случайные величины $\{\xi_k^{(n)}\}$ такие, что с точностью до постоянной (или с точностью до медленно меняющейся функции) неравенства (2) будут верны в обратную сторону, то мы получим, что z_n имеет порядок $(L_s^{(n)})^{1/s+1}$. Именно, справедливо

Следствие 1. *Для любого $s>2$ существует такая последовательность серий $\{\xi_{k}^{(n)}\}$, что*

$$L_C(P_n,W)>(L_s^{(n)})^{1/(s+1)}/8 \text{ и } L_s^{(n)}\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Рассмотрим теперь важный частный случай, когда

$$\xi_k^{(n)}=\frac{1}{\sqrt{n}}\xi_k, \tag{3}$$

где $\{\xi_k\}$ — последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин, удовлетворяющая условиям $\mathbf{M}\xi_1=0$, $\mathbf{D}\xi_1=1$. В этом случае $(L_s^{(n)})^{1/(s+1)}=(\mathbf{M}|\xi_1|^s)^{1/(s+1)}n^{-1/2+3/(2s+2)}$. Оказывается, что даже в случае (3) оценка (1) по существу неулучшаема, а именно справедливо

Следствие 2. *Для любых $s>2$ и $\alpha>0$ найдутся число $a>0$ и последовательность серий, удовлетворяющая условию (3), для которой $\mathbf{M}|\xi_1|^s<\infty$ и*

$$L_C(P_n,\ W)\geqslant an^{-1/2+3/(2s+2)}(1+\ln n)^{-(1+\alpha)/(s+1)}.$$

В качестве требуемой в следствии 2 последовательности $\{\xi_k\}$ можно брать любую последовательность, удовлетворяющую условиям $\mathbf{M}\xi_1=0$, $\mathbf{D}\xi_1=1$ и $\mathbf{P}(|\xi_1|>x)\sim x^{-s}(\ln x)^{-1-\alpha}$ при $x\to\infty$.

2. Другие оценки скорости сходимости. Множество $B\in H$ называется липшицевым относительно метрики ρ и меры W (или, для краткости, $(\rho,\ W)$-липшицевым), если существует постоянная C_B, при которой $W(G_\varepsilon(\partial B))<C_B\varepsilon$, где ∂B — граница B.

Обозначим

$$\Delta_n(B)=|\mathbf{P}_n(B)-W(B)|.$$

Нетрудно видеть, что для $(\rho,\ W)$-липшицева множества B

$$\Delta_n(B)\leqslant(C_B+1)L(P_n,\ W).$$

Как показывает теорема 1, для $L_C(P_n,\ W)$ имеет место неулучшаемая оценка (1). Однако оказывается, что для $\Delta_n(B)$ справедлива более точная оценка.

Теорема 2. *При $2<s\leqslant 4$ для любого $(\rho_C,\ W)$-липшицева множества B справедливо неравенство*

$$\Delta_n(B)\leqslant(C_B+1)c_2(L_s^{(n)})^{1/s}(1+|\ln L_s^{(n)}|)^{(3s-3)/2s}.$$

Замечание 1. В ([3]) приведен пример схемы серий разнораспределенных величин и $(\rho_C,\ W)$-липшицева множества $B_0=\{x\in C\colon\ (\forall t)(x(t)\leqslant\leqslant 0)\}$, для которых

$$\Delta_n(B_0)\geqslant c_3(L_s^{(n)})^{1/s}. \tag{4}$$

Этот пример показывает на невозможность существенного улучшения неравенства в теореме 2, по крайней мере в случае, когда не выполнено условие (3).

Замечание 2. Пусть заданный в C функционал f и распределение $f(w)$ в точке u удовлетворяют условиям

$$|f(x)-f(y)|<C(f)\rho(x, y),$$
$$|\mathbf{P}(f(w)<u+\varepsilon)-\mathbf{P}(f(w)<u-\varepsilon)|<C(f, u)|\varepsilon|, \tag{5}$$

где постоянные $C(f)$ и $C(f, u)$ зависят только от своих аргументов. Обозначим

$$\Delta_n(f, u)=|\mathbf{P}(f(s_n)<u)-\mathbf{P}(f(w)<u)|.$$

Оказывается, что оценки для $\Delta_n(f, u)$ легко получаются из оценок для $\Delta_n(B)$ и наоборот. Точнее, справедливо следующее

Утверждение. *Для того чтобы для всех (ρ, W)-липшицевых множеств B было справедливо неравенство*

$$\Delta_n(B)\leqslant(C_B+1)\delta_n,$$

необходимо и достаточно, чтобы для всех функционалов f, удовлетворяющих условиям (5), *выполнялось*

$$\Delta_n(f, u)\leqslant(C(f)C(f, u)+1)\delta_n.$$

Необходимость в этом утверждении сразу следует из (ρ, W)-липшицевости множества $B(u)=\{x\colon f(x)<u\}$, у которого $C_{B(u)}\leqslant C(f)C(f, u)$. Чтобы доказать достаточность, нужно заметить, что функционал $f_B(x)=(1-2\chi_B(x))\rho(x, \partial B)$ (здесь χ_B — характеристическая функция множества B) удовлетворяет условиям (5) в точке $u=0$, при этом $C(f)=1$, а $C(f, 0)\leqslant C_B$.

3. Рассмотрим теперь другую метрику в пространстве C. Пусть $x, y\in C$. Около каждой точки $(t, x(t))$ на плоскости (t, x) опишем круги радиуса ε и рассмотрим объединение $G_\varepsilon(x)$ всех этих кругов. Аналогично строится окрестность $G_\varepsilon(y)$. Мы будем говорить, что $\rho_F(x, y)\leqslant\varepsilon$, если график функции $y(t)$ принадлежит $G_\varepsilon(x)$, а график функции $x(t)$ принадлежит $G_\varepsilon(y)$.

Так как $\rho_F(x, y)\leqslant\rho_C(x, y)$, то расстояние $L_F(P_n, W)$ между мерами, соответствующее метрике ρ_F, удовлетворяет неравенству $L_F(P_n, W)\leqslant L_C(P_n, W)$.

Теорема 3. *При $s>2$ для любого (ρ_F, W)-липшицева множества B справедливо неравенство*

$$\Delta_n(B)\leqslant(C_B+1)c_4s^s(L_s^{(n)})^{1/s}.$$

Так как множество B_0, фигурирующее в замечании 1, является (ρ_F, W)-липшицевым, то из (4) вытекает невозможность существенного улучшения оценки в теореме 3. Из этого факта и приведенных теорем следует также, что для получения лучшей чем $(L_s^{(n)})^{1/s}$ скорости сходимости для $\Delta_n(B)$ необходимо накладывать дополнительные ограничения на класс множеств B. В частности, для множеств B вида $B=\{x\colon g_1(t)<x(t)<g_2(t)\}$ или $B=\{x\colon \int_0^1\varphi(t, x(t))dt<u\}$ более сильные оценки получены в работах [4-6].

Автор пользуется случаем поблагодарить А. А. Боровкова за полезные обсуждения.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
12 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. И. Гихман, А. В. Скороход*, Введение в теорию случайных процессов, М., 1965. [2] *Ю. В. Прохоров*, Теория вероятн. и ее примен., т. 1, 177 (1965). [3] *А. А. Боровков*, там же, т. 18, 217 (1973). [4] *С. В. Нагаев*, там же, т. 15, 179 (1970). [5] *S. Sawyer*, Ann. Math. Statist., v. 43, 273 (1972). [6] *И. С. Борисов*, Тез. XII студенч. конфер. Новосиб. гос. унив., Новосибирск, 1974.