Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 5

УДК 51.01:518.5

МАТЕМАТИКА

Д. СКОРДЕВ

ОДНО ОБОБЩЕНИЕ ТЕОРИИ РЕКУРСИВНЫХ ФУНКЦИЙ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 31 V 1974)

В настоящей работе предлагается одно сообщение теории рекурсивных функций в духе некоторых идей из работ Московакиса [1, 2], Фридмана [3], Вагнера [4, 5, 6], Стронга [7] и автора [8, 9]. До известной степени это обобщение объединяет подходы, указанные в цитированных работах (близость некоторых из этих подходов была отмечена, например, в [2, 10], причем в [2] было высказано предположение о возможности объединения двух из них).

Для любых множеств A и B **частично-многозначной функцией** (ч.м.ф.) из A в B будем называть любое подмножество произведения $A\times B$. Если f — ч.м.ф. из A в B и $a\in A$, то значением выражения $f(a)$ будем считать любой элемент B множества B, который удовлетворяет условию $\langle a, b\rangle\in f$. Для более сложных выражений, содержащих знаки для ч.м.ф, понятие значения определяется так же, как в [1]. Два выражения считаются равными (при заданных значениях параметров, если такие имеются) тогда и только тогда, когда (при тех же значениях параметров) множество всех значений первого выражения совпадает с множеством всех значений второго; для этого вида равенства будем использовать знак $\simeq$.

Множество всех натуральных чисел будем обозначать через N. Нам нужно уточнить смысл μ-операции в случае применения ее к ч.м.ф. из N в N. Если f — такая ч.м.ф., то значением выражения $\mu t[f(t)=0]$ будем считать любое натуральное число t_0, которое удовлетворяет следующему условию: 0 является значением выражения $f(t_0)$, а для любого $t<t_0$ выражение $f(t)$ имеет ненулевое значение.

Пусть M — некоторое множество. Будем говорить, что задана **обобщенная алгебраическая система** (о.а.с.) с носителем M, если для любых натуральных чисел p и q указано некоторое множество $\mathscr{F}_{p,q,0}$, состоящее из ч.м.ф. из $N^p\times M^q$ в N, и некоторое множество $\mathscr{F}_{p,q,1}$, состоящее из ч.м.ф. из $N^p\times M^q$ в M. Если рассматриваемую о.а.с. обозначим через $\mathfrak{A}$, то множество $\mathscr{F}_{p,q,k}$ будем обозначать через $\mathscr{F}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$.

Пусть $\mathfrak{A}$ — о.а.с. с носителем M. Для любых натуральных p и q определим множество $\mathscr{G}_{p,q,0}(\mathfrak{A})$, состоящее из некоторых ч.м.ф. из $N^p\times M^q$ в N, и множество $\mathscr{G}_{p,q,1}(\mathfrak{A})$, состоящее из некоторых ч.м.ф. из $N^p\times M^q$ в M. Сделаем это при помощи следующего индуктивного определения (где строчные латинские буквы являются переменными для натуральных чисел, а строчные греческие буквы — для элементов множества M; это соглашение имеется в виду и в дальнейшем):

I. Если $f\in\mathscr{F}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$, то $f\in\mathscr{G}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$.

II. Постоянная 0 принадлежит множеству $\mathscr{G}_{0,0,0}(\mathfrak{A})$.

III. $\lambda x[x+1]\in\mathscr{G}_{1,0,0}(\mathfrak{A})$.

IV. $\lambda x_1\ldots x_p\xi_1\ldots\xi_q[x_i]\in\mathscr{G}_{p,q,0}(\mathfrak{A})$ при $1\leqslant i\leqslant p$; $q=0, 1, 2, \ldots$

V. $\lambda x_1\ldots x_p\xi_1\ldots\xi_q[\xi_i]\in\mathscr{G}_{p,q,1}(\mathfrak{A})$ при $1\leqslant i\leqslant q$; $p=0, 1, 2, \ldots$

VI. Нигде не определенная нульместная функция принадлежит множеству $\mathscr{G}_{0,0,1}(\mathfrak{A})$.

VII. Если $f\in\mathscr{G}_{r,s,k}(\mathfrak{A})$, $g_1, \ldots, g_r\in\mathscr{G}_{p,q,0}(\mathfrak{A})$, $g_{r+1}, \ldots, g_{r+s}\in\mathscr{G}_{p,q,1}(\mathfrak{A})$, то $\lambda x_1\ldots x_p\xi_1\ldots\xi_q[f(g_1(x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q), \ldots, g_{r+s}(x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q))]\in\mathscr{G}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$.

VIII. Пусть ч.м.ф. f определяется при помощи равенств

$$f(0, x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q) \simeq f_0(x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q),$$

$$f(t+1, x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q) \simeq$$

$$\simeq f_1(t, x_1, \ldots, x_p, f(t, x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q), \xi_1, \ldots, \xi_q),$$

где $f_0 \in \mathscr{G}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$ и $f_1 \in \mathscr{G}_{p+2-k, q+k, k}(\mathfrak{A})$. Тогда $f \in \mathscr{G}_{p+1,q,k}(\mathfrak{A})$.

IX. Пусть ч.м.ф. f определяется при помощи равенств

$$f(0, x_1, \ldots, x_p) \simeq f_0(x_1, \ldots, x_p),$$

$$f(t+1, x_1, \ldots, x_p) \simeq f_1(x_1, \ldots, x_p),$$

где $f_0 \in \mathscr{G}_{p,0,1}(\mathfrak{A})$ и $f_1 \in \mathscr{G}_{p,0,1}(\mathfrak{A})$. Тогда $f \in \mathscr{G}_{p+1,0,1}(\mathfrak{A})$.

X. Если ч.м.ф. f определяется при помощи равенства

$$f(x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q) \simeq \mu t[f_0(t, x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q) = 0],$$

где $f_0 \in \mathscr{G}_{p+1,q,0}(\mathfrak{A})$, то $f \in \mathscr{G}_{p,q,0}(\mathfrak{A})$.

Все пункты данного выше определения, за исключением п.п. VI и IX, соответствуют некоторым пунктам обычного определения μ-рекурсивности для числового случая. П.п. VI и IX будут излишними во всех случаях, когда для некоторого r некоторая ч.м.ф., принадлежащая множеству $\mathscr{F}_{r,0,1}(\mathfrak{A})$, имеет значение хотя бы в одной точке. П. IX излишен также и в случае, когда такое r не существует; невозможно, однако, дать интуиционистское доказательство устранимости этого пункта для общего случая.

Обозначим через M^* множество всех кортежей ненулевой длины, члены которых принадлежат M. Отождествляя каждый элемент множества M с соответствующим одночленным кортежом, будем считать, что $M \subset M^*$. Тогда для любых p и q также $N^p \times M^q \subset N^p \times (M^*)^q$. Определим о.а.с. $\mathfrak{A}^*$ с носителем M^* следующим образом. Во-первых, для $k=0, 1$ и любых p и q к множеству $\mathscr{F}_{p,q,k}(\mathfrak{A}^*)$ причисляем все элементы множества $\mathscr{F}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$. Кроме того к множеству $\mathscr{F}_{0,1,0}(\mathfrak{A}^*)$ причислим еще функцию H, определяемую при помощи равенств

$$H(\langle \xi_1, \ldots, \xi_s \rangle) \simeq \mathrm{sg}(s-1),$$

а к множеству $\mathscr{F}_{0,1,1}(\mathfrak{A}^*)$ причислим еще функции F_1 и F_2, определяемые при помощи равенств

$$F_1(\langle \xi_1, \ldots, \xi_s \rangle) \simeq \xi_s, \quad F_2(\langle \xi_1, \ldots, \xi_s \rangle) \simeq \langle \xi_1, \ldots, \xi_{s-1} \rangle,$$

где $F_2(\langle \xi_1, \ldots, \xi_s \rangle)$ определено только тогда, когда $s \geqslant 2$. Наконец, к множеству $\mathscr{F}_{0,2,1}(\mathfrak{A}^*)$ причислим еще функцию P, определяемую при помощи равенства

$$P(\langle \xi_1, \ldots, \xi_s \rangle, \langle \eta_1, \ldots, \eta_l \rangle) \simeq \langle \xi_1, \ldots, \xi_s, \eta_1, \ldots, \eta_l \rangle.$$

Для любых натуральных p и q через $\mathscr{H}_{p,q,0}(\mathfrak{A})$ и $\mathscr{H}_{p,q,1}(\mathfrak{A})$ будем обозначать множество тех ч.м.ф. f из $N^p \times M^q$ соответственно в N и в M, которые удовлетворяют следующему условию: существует такая ч.м.ф. $g \in \mathscr{G}_{p,q,k}(\mathfrak{A}^*)$, что для любых $x_1, \ldots, x_p$ из N и любых $\xi_1, \ldots, \xi_q$ из M верно равенство

$$f(x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q) \simeq g(x_1, \ldots, x_p, \xi_1, \ldots, \xi_q).$$

Легко доказать, что $\mathscr{G}_{p,q,k}(\mathfrak{A}) \subset \mathscr{H}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$ для $k=0, 1$ и любых натуральных p и q. При помощи примера можно убедиться, что иногда $\mathscr{G}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$ может быть собственным подмножеством множества $\mathscr{H}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{A}$ — о.а.с., для которой существуют $J \in \mathscr{G}_{0,2,1}(\mathfrak{A})$, J_0, J_1, E_0, $E_1 \in \mathscr{G}_{0,1,1}(\mathfrak{A})$ и $K \in \mathscr{G}_{0,1,0}(\mathfrak{A})$, удовлетворяющие следующим условиям:*

$$\forall \xi_0 \xi_1 \exists \eta [J(\xi_0, \xi_1) \simeq \eta \mathbin{\&} J_0(\eta) \simeq \xi_0 \mathbin{\&} J_1(\eta) \simeq \xi_1], \tag{1}$$

$$\forall \xi \exists \eta [E_0(\xi) \simeq \eta \mathbin{\&} K(\eta) \simeq 0],$$

$$\forall \xi \exists \eta [E_1(\xi) \simeq \eta \mathbin{\&} K(\eta) \simeq 1].$$

При этих предположениях можно утверждать, что

$$\mathscr{G}_{p,q,k}(\mathfrak{A})=\mathscr{H}_{p,q,k}(\mathfrak{A}),\quad k=0,1;\quad p,q=0,1,2,\ldots \tag{2}$$

Следствие. *Для любой о.а.с.* $\mathfrak{A}$ *верны равенства*

$$\mathscr{G}_{p,q,k}(\mathfrak{A}^*)=\mathscr{H}_{p,q,k}(\mathfrak{A}^*),\quad k=0,1;\quad p,q=0,1,2,\ldots$$

Можно доказать, что равенства (2) верны также и в случае, когда все множества $\mathscr{F}_{p,q,1}(\mathfrak{A})$ пусты.

Ч.м.ф., принадлежащие множествам $\mathscr{H}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$, естественно называть μ-рекурсивными относительно данной о.а.с. $\mathfrak{A}$. Это понятие μ-рекурсивности по существу эквивалентно понятию, введенному в ([1]) и обозначаемому термином «absolute prime computability». Оно эквивалентно также машинной вычислимости некоторого вида, которую мы сейчас коротко опишем.

Рассмотрим машину $\mathfrak{M}$, имеющую две последовательности ячеек: $Я_0^0, Я_1^0, Я_2^0, \ldots$ и $Я_0^1, Я_1^1, Я_2^1, \ldots$. В ячейках вида $Я_n^0$ могут находиться натуральные числа, а в ячейках вида $Я_n^1$ — элементы множества M. Машина выполняет программу, состоящую из команд следующих шести видов, причем в командах вида д) f должно принадлежать множеству $\mathscr{F}_{r,s,k}(\mathfrak{A})$:

а) Прибавить единицу к содержанию ячейки $Я_n^0$.

б) Если в ячейке $Я_n^0$ находится положительное число, то из этого числа вычесть единицу и перейти к выполнению команды с номером m.

в) Переписать содержание ячейки $Я_0^1$ в ячейку $Я_z^1$, где z — содержание ячейки $Я_0^0$.

г) Переписать в ячейку $Я_0^1$ содержание ячейки $Я_z^1$, где z — содержание ячейки $Я_0^0$.

д) Записать в ячейке $Я_0^k$ некоторое значение выражения $f(x_1,\ldots,x_r,\xi_1,\ldots,\xi_s)$, где $x_1,\ldots,x_r$, $\xi_1,\ldots,\xi_s$ — содержания соответственно ячеек $Я_1^0,\ldots,Я_r^0, Я_1^1,\ldots,Я_s^1$.

е) Остановиться.

Для $k=0, 1$ и произвольных натуральных p и q машина $\mathfrak{M}$ вычисляет некоторую ч.м.ф. $f^{\mathfrak{M}}_{p,q,k}$, определяемую следующим образом: для того чтобы найти некоторое значение выражения $f^{\mathfrak{M}}_{p,q,k}(a_1,\ldots,a_p,\alpha_1,\ldots,\alpha_q)$, работа машины начинается с ситуации, когда в $Я_1^0,\ldots,Я_p^0,Я_1^1,\ldots,Я_q^1$ находятся соответственно $a_1,\ldots,a_p$, $\alpha_1,\ldots,\alpha_q$, во всех остальных ячейках вида $Я_n^0$ находится 0 и все остальные ячейки вида $Я_n^1$ пусты; считается, что написанное выше выражение имеет в качестве значения содержание ячейки $Я_0^k$ в момент работы, когда следует выполнить команду вида е).

После некоторого уточнения деталей в данном выше определении можно доказать, что множеству $\mathscr{H}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$ принадлежат те и только те ч.м.ф., которые представимы в виде $f^{\mathfrak{M}}_{p,q,k}$, где $\mathfrak{M}$ — машина описанного вида.

Об о.а.с. $\mathfrak{A}$ с носителем M будем говорить, что она является о.а.с. специального типа, если существуют такое подмножество C множества M и такие ч.м.ф. ν, ρ и Φ, что:

I. $\mathscr{F}_{0,0,1}(\mathfrak{A})$ состоит из всех нульместных константных функций со значениями из C.

II. $\mathscr{F}_{1,0,1}(\mathfrak{A})=\{\nu\}$.

III. $\mathscr{F}_{0,1,0}(\mathfrak{A})=\{\rho\}$.

IV. $\mathscr{F}_{0,2,1}(\mathfrak{A})=\{\Phi\}$.

V. Все остальные множества $\mathscr{F}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$ пусты.

VI. $\forall x\exists\xi[\nu(x)\simeq\xi\&\rho(\xi)\simeq x]$.

VII. Существуют α_0, α_1, α_2, α_3, α_4, α_5, и α_6 из C со следующими свойствами:

0) Для любых ξ и η справедливо равенство $\Phi(\Phi(\alpha_0,\xi),\eta)\simeq\xi$. При этом для любого ξ выражения $\Phi(\alpha,\xi)$ имеет ровно одно значение и это значение принадлежит множеству C каждый раз, когда $\xi\in C$.

1) Для любых ξ, η и ζ верно равенство

$$\Phi(\Phi(\Phi(\alpha_1, \xi), \eta), \zeta) \simeq \Phi(\Phi(\xi, \zeta), \Phi(\eta, \zeta)).$$

При этом для любых ξ и η выражение $\Phi(\Phi(\alpha_1, \xi), \eta)$ имеет ровно одно значение и это значение принадлежит множеству C каждый раз, когда ξ и η принадлежат C.

2) $\Phi(\alpha_2, \nu(0) \simeq \alpha_0 \& \forall x[\Phi(\alpha_2, \nu(x+1)) \simeq \alpha_1]$.

3) $\forall x\ [\Phi(\alpha_3, \nu(x)) \simeq \nu(x+1]$.

4) $\forall x\ [\Phi(\alpha_4, \nu(x+1)) \simeq \nu(x)]$.

5) $\forall \xi\ [\Phi(\alpha_5, \xi) \simeq \nu(0)]$.

6) $\forall \xi\ [\Phi(\alpha_6, \xi) \simeq \nu(\rho(\xi))]$.

Множество C и ч.м.ф. ν, ρ и Φ будем называть характеристиками о.а.с. $\mathfrak{A}$.

Теорема 2. *Пусть* $\mathfrak{A}$ — *о.а.с. специального типа с характеристиками* C, ν, ρ *и* Φ. *Положим*

$$\Phi_1 = \Phi, \quad \Phi_{n+1} = \lambda \xi_0 \xi_1 \ldots \xi_n \xi_{n+1} [\Phi(\Phi_n(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n), \xi_{n+1})].$$

Тогда при $p+q \geqslant 1$ *множество* $\mathscr{H}_{p,q,1}(\mathfrak{A})$ *и множество* $\mathscr{H}_{p,q,0}(\mathfrak{A})$ *состоят соответственно из всех ч.м.ф. вида*

$$\lambda x_1 \ldots x_p \xi_1 \ldots \xi_q [\Phi_{p+q}(\alpha, \nu(x_1), \ldots, \nu(x_p), \xi_1, \ldots, \xi_q)]$$

и всех ч.м.ф. вида

$$\lambda x_1 \ldots x_p \xi_1 \ldots \xi_q [\rho(\Phi_{p+q}(\alpha, \nu(x_1), \ldots, \nu(x_p), \xi_1, \ldots, \xi_q))],$$

где $\alpha \in C$; *при этом при* $p+q>1$ α *может быть подчинено дополнительному условию, что для любых* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{p+q-1}$ *выражение* $\Phi_{p+q-1}(\alpha, \zeta_1, \ldots$ $\ldots, \zeta_{p+q-1})$ *имеет ровно одно значение и это значение принадлежит множеству* C *каждый раз, когда* $\zeta_1, \ldots, \zeta_{p+q-1} \in C$.

Две о.а.с. $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ будем называть эквивалентными, если их носители совпадают и имеют место равенства

$$\mathscr{H}_{p,q,k}(\mathfrak{A}_1) = \mathscr{H}_{p,q,k}(\mathfrak{A}_2), \quad k=0,\ 1;\ p,\ q=0,\ 1,\ 2, \ldots$$

Теорема 3. *Пусть о.а.с.* $\mathfrak{A}$ *с носителем* M *такова, что каждый элемент множества* $\mathscr{F}_{0,0,1}(\mathfrak{A})$ *имеет ровно одно значение, а объединение остальных множеств* $\mathscr{F}_{p,q,k}(\mathfrak{A})$ *состоит из конечного числа элементов. Для того чтобы* $\mathfrak{A}$ *была эквивалентна некоторой о.а.с. специального типа, необходимо и достаточно, чтобы существовали* $J \in \mathscr{H}_{0,2,1}(\mathfrak{A})$ *и* J_0, $J_1 \in \mathscr{H}_{0,1,1}(\mathfrak{A})$, *удовлетворяющие условию* (1), *и имели место равенства* $K(\varepsilon_0) \simeq 0$, $K(\varepsilon_1) \simeq 1$ *для некоторых* ε_0, $\varepsilon_1 \in M$, *для которых соответствующие нульместные функции принадлежат* $\mathscr{H}_{0,0,1}(\mathfrak{A})$ *и некоторой* $K \in \mathscr{H}_{0,1,0}(\mathfrak{A})$.

Из теорем 2 и 3 получается достаточное условие того, чтобы существовала ч.м.ф. $\Phi \in \mathscr{H}_{0,2,1}(\mathfrak{A})$ со следующим свойством: для любого натурального n каждая функция из множества $\mathscr{H}_{0,n+1,1}(\mathfrak{A})$ представима в виде $\lambda \xi_1 \ldots \xi_n \xi_{n+1} [\Phi(\theta(\xi_1, \ldots, \xi_n), \xi_{n+1})]$, где $\theta \in \mathscr{H}_{0,n,1}(\mathfrak{A})$ и $\forall \xi_1 \ldots$ $\ldots \xi_n \exists \eta\, [\theta(\xi_1 \ldots \xi_n) \simeq \eta]$. Обобщая терминологию из ([11]), такую ч.м.ф. можно назвать главной универсальной для множества $\mathscr{H}_{0,1,1}(\mathfrak{A})$.

Софийский университет
София, Народная Республика Болгария

Поступило
5 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Y. N. Moschovakis*, Trans. Am. Math. Soc., v. 138, 427 (1969). [2] *Y. N. Moschovakis*, In: Logic Colloquium, 1969, Amsterdam – London, 1971, p. 199. [3] *H. M. Friedman*, ibid., p. 361. [4] *E. G. Wagner*, Intern. Busines Machines Corpor. Res. Rep., RC934, 1963. [5] *E. G. Wagner*, Information Sci., v. 1, 343 (1969). [6] *E. G. Wagner*, Trans. Am. Math. Soc., v. 144, 1 (1969). [7] *H. R. Strong*, Intern. Busines Machines Corpor. J. Res. Deve-
ibid., p. 361. [4] *E. G. Wagner*, Intern. Busines Machines Corpor. Res. Rep., RC934, 1963. [9] *Д. Скордев*, Год. Соф. унив., Мат. фак., т. 59, 117 (1964–1965). [10] *H. R. Strong*, Math. Rev., v. 46, 3275 (1974). [11] *В. А. Успенский*, Лекции о вычислимых функциях, М., 1960.