Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 4

МАТЕМАТИКА

М. Ш. ГОЛЬДШТЕЙН, Э. Ф. СЛУЖЕВСКИЙ

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ ЗАМКНУТЫХ РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 23 VII 1974)

1. Пусть S — замкнутая риманова поверхность, σ — автоморфизм S. σ может вовсе не иметь неподвижных точек, если же он имеет хотя бы одну такую точку, то правдоподобно, что он имеет еще одну неподвижную точку. Во всяком случае справедлива

Теорема 1. *Если порядок N автоморфизма σ замкнутой римановой поверхности S есть простое число и σ имеет неподвижную точку, то σ имеет по крайней мере еще одну неподвижную точку.*

Доказательство. Можно считать, что $N\geqslant 3$, так как при $N=2$ число неподвижных точек четно. Каждой точке $P\in S$ можно поставить в соответствие множество чисел $\alpha(P)=\{\alpha_1(P), \ldots, \alpha_g(P)\}$, удовлетворяющее условиям:

1) $\alpha_1(P)>1$, $\alpha_j(P)<\alpha_{j+1}(P)$, $\alpha_g(P)=2g$;

2) для любого $\alpha_j(P)$ существует на S мероморфная функция f, имеющая в точке P полюс порядка $\alpha_j(P)$ и не имеющая других особенностей.

Пусть P_0 — неподвижная точка автоморфизма σ. В некотором локальном параметре z в точке P_0 σ имеет вид $z\to\eta z$, где η — первообразный корень N-й степени из единицы. Можно построить g функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_g$, которые удовлетворяют условиям

$$\varphi_i(z)=a^{(i)}_{-\alpha_i(P_0)}z^{-\alpha_i(P_0)}+\ldots+a^{(i)}_{-\alpha_1(P_0)}z^{-\alpha_1(P_0)}+\ldots,$$

где $a^{(i)}_{-\alpha_i(P_0)}=1$, $a^{(i)}_{-\alpha_j(P_0)}=0$ при $j<i$, $a^{(i)}_0=0$. Нетрудно показать, что $\varphi_j\circ\sigma=\eta^{-\alpha_j(P_0)}\varphi_j$. Предположив, что P_0 — единственная неподвижная точка автоморфизма σ, получим, что число нулей функции φ_j кратно N. Следовательно, все числа множества $\alpha(P_0)$ делятся на N что невозможно.

Замечание. Теорема 1 остается верной и в случае, когда $N=q^n$, где q — простое число, за исключением случая, когда S — гиперэллиптическая поверхность, $q=2$, $n>1$, P_0 не является точкой Вейерштрасса.

Теорема 2. *Пусть $N=q_1^{n_1}\ldots q_s^{n_s}$, где $q_1, \ldots, q_s$ — простые числа. Если $\sigma(P_0)=P_0$ и $\alpha_1(P_0)<\min(q_1, \ldots, q_s)$, то у σ есть по крайней мере еще одна неподвижная точка.*

Теорема 3. *Пусть $N=q_1^{n_1}\ldots q_s^{n_s}$, где $q_1, \ldots, q_s$ — простые числа, σ имеет две неподвижные точки P_1, P_2. Если $\alpha_l(P_1)<\min(q_1, \ldots, q_s)$, то $\alpha_j(P_1)=\alpha_j(P_2)$, $j=1, \ldots, l$.*

Теорема 4. *Пусть N — простое число, σ имеет две неподвижные точки P_1, P_2. Пусть η_1, η_2 — комплексные числа такие, что в точке P_i, $i=1, 2$, σ имеет вид $z\to\eta_i z+\ldots$ Если $\alpha_1(P_1)<N$, то $\eta_1\eta_2=1$.*

2. Пусть S — замкнутая риманова поверхность и σ — автоморфизм S. Мы скажем, что пара (S, σ) вкладывается в $\mathbf{R}^3$, если существует риманова поверхность S_0, лежащая в $\mathbf{R}^3$, и конформное отображение h S на S_0 такое, что $h\sigma h^{-1}$ индуцируется некоторым вращением в $\mathbf{R}^3$. Нетрудно привести пример автоморфизма, имеющего 3 неподвижные точки. Так, автоморфизм римановой поверхности, заданной уравнением $w^3=z(z+1)$, пе-

реводящий точку (z, w) в точку $(z, e^{2\pi i/3}w)$, имеет 3 неподвижные точки. Этот пример показывает, что не всякую пару (S, σ) можно вложить в $\mathbf{R}^3$.

Теорема 5. *Пусть σ — автоморфизм замкнутой римановой поверхности S. Если пара (S_1, σ_1) вкладывается в $\mathbf{R}^3$ и существует гомеоморфизм f S на S_1 такой, что $f\circ\sigma$ гомотопно $\sigma_1\circ f$, то и пара (S, σ) вкладывается в $\mathbf{R}^3$.*

3. Пусть S — замкнутая риманова поверхность. Рассмотрим последовательность дивизоров одинаковой структуры

$$D_k = P_{1k}^{\alpha_1} \dots P_{nk}^{\alpha_n} Q_{1k}^{-\beta_1} \dots Q_{mk}^{-\beta_m},$$

где $P_{ik}, Q_{jk} \in S$; α_i, β_j — натуральные числа. Если известно, что $P_{ik} \to P_{i0}$, $Q_{jk} \to Q_{j0}$ при $k\to\infty$, то скажем, что последовательность дивизоров D_k сходится к дивизору $D_0 = P_{10}^{\alpha_1} \dots Q_{m0}^{-\beta m}$. Пусть известно, что некоторый дивизор D_0 является главным. Существует ли сходящаяся к D_0 последовательность главных дивизоров, той же структуры, что и D_0?

Пусть род поверхности S равен g. Зафиксируем на S базис гомологий $a_1, \dots, a_g$; $b_1, \dots, b_g$ и соответствующий нормированный базис абелевых дифференциалов первого рода $\varphi_1, \dots, \varphi_g$. Пусть $U_1, \dots, U_{n+m}$ — попарно непересекающиеся параметрические окрестности точек дивизора D_0. Построим отображение $F\colon U_1\times\dots\times U_{n+m} \to \mathbf{C}^g$ следующим образом. Для произвольного набора $(P_1, \dots, Q_m) \in U_1\times\dots\times U_{n+m}$ положим

$$f_k(P_1, \dots, Q_m) = \sum \alpha_i \int_{P_{i0}}^{P_i} \varphi_k - \sum \beta_j \int_{Q_{j0}}^{Q_j} \varphi_k,$$

где интегрирование ведется по прямолинейным отрезкам.

Положим $F = (f_1, \dots, f_g)$.

Теорема 6. *Для того чтобы существовала сходящаяся к D_0 последовательность главных дивизоров той же структуры, что и D_0, необходимо и достаточно, чтобы для любой системы окрестностей $\tilde U_1, \dots, \tilde U_{n+m}$, таких, что $\tilde U_i \subset U_i$, $i=1, \dots, n+m$, F обращалась в 0 на множестве $\tilde U_1\times\dots\times\tilde U_{n+m} \setminus (P_{10}, \dots, Q_{m0})$.*

Достаточность условий теоремы легко следует из теоремы Абеля. Центральным пунктом в доказательстве необходимости является следующая

Лемма. *Существует такое $\varepsilon_0>0$, что если для некоторого цикла a выполняются неравенства*

$$\left| \int_a \varphi_k \right| \leqslant \varepsilon_0, \qquad k=1, \dots, g,$$

то a гомологичен 0.

Доказательство леммы. Положим

$$B_{kj} = \int_{b_j} \varphi_k, \qquad B_{kj} = \operatorname{Re} B_{kj} + i \operatorname{Im} B_{kj}.$$

Известно, что матрица $(\operatorname{Im} B_{kj})$ невырожденная. Следовательно, существует $\varepsilon_1>0$ такое, что для любого набора вещественных чисел $x_1, \dots, x_g$, удовлетворяющего неравенству $x_1^2+\dots+x_g^2 \geqslant 1$, будет

$$\left| \sum_j x_j \operatorname{Im} B_{kj} \right| > \varepsilon_1, \tag{1}$$

по крайней мере для одного k. Положим $\varepsilon_0 = \min(\varepsilon_1, 1/2)$. Пусть a — цикл,

$$a \sim \sum_k p_k a_k + \sum_k q_k b_k,$$

где p_k, q_k — целые числа. Имеем

$$\int_a \varphi_k = p_k + \sum_j q_j B_{kj}.$$

Предположим, что

$$\left| \int_a \varphi_k \right| \leqslant \varepsilon_0, \qquad k=1, \ldots, g.$$

Тогда

$$\left| p_k + \sum_j q_j B_{kj} \right| \leqslant \varepsilon_0, \qquad k=1, \ldots, g. \tag{2}$$

Если хотя бы одно из чисел $q_1, \ldots, q_g$ не равно нулю, то $q_1^2+\ldots+q_g^2 \geqslant 1$. Но тогда, разделяя вещественную и мнимую части в (2), мы получим противоречие с (1).

Следовательно, $q_1=\ldots=q_g=0$. Тогда из (2) следует, что

$$|p_k| \leqslant \varepsilon_0 \leqslant 1/2, \; k=1, \ldots, g.$$

Но p_k — целые числа. Поэтому $p_1=\ldots=p_g=0$. Лемма доказана.

Используя эту лемму, можно также доказать следующее утверждение.

Теорема 7. *Предел последовательности главных дивизоров одинаковой структуры является главным дивизором.*

Другими методами эта теорема недавно была доказана Р. Рахманкуловым и Э. Якубовым.

Ташкентский государственный университет
им. В. И. Ленина

Поступило
17 V 1974