Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 4

УДК 539.376+532.135 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В. Г. ГРОМОВ

ДИНАМИЧЕСКИЙ КРИТЕРИЙ УСТОЙЧИВОСТИ И ЗАКРИТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ ГИБКИХ ВЯЗКОУПРУГИХ ТЕЛ ПРИ ТЕРМОСИЛОВОМ ЗАГРУЖЕНИИ

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 26 VII 1974)

1. Исследование устойчивости гибких вязкоупругих тел в рамках принципа линеаризации обычно сводится к изучению расположения спектра некоторой граничной задачи в зависимости от значений параметров ([1] и др.). Однако такое сведение не всегда возможно и зависит прежде всего от свойств операторов вязкоупругости. Важнейшее из них было отмечено еще Вольтерра и получило название условия замкнутого цикла ([2, 3]). Ему удовлетворяют дифференциальные и наследственные операторы с разностными ядрами. Операторы термовязкоупругости не только не удовлетворяют условию замкнутого цикла, но и являются неоднородными по координатам точек тела. В связи с этим возникает новая задача формулировки критерия устойчивости и изучения закритического поведения для термовязкоупругих гибких тел. Ниже излагается методика исследования этой задачи. Математические вопросы здесь не затрагиваются.

2. Пусть гибкое термовязкоупругое тело занимает область Ω и ограничено поверхностью Σ. Задача о движении приводится к системе нелинейных уравнений

$$\rho\, \partial^2 u_i/\partial t^2 = ((\delta_{ik}+u_{i,k})\delta_{kj})_{,j}+f_i, \qquad \sigma_{ij}=\bar{E}_{ijkl}(\varepsilon_{kl}-\gamma_{kl}\theta),$$

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}(u_{i,j}+u_{j,i}+u_{k,i}u_{k,j}), \quad \bar{E}_{ijkl}=E_{ijkl}-\int_0^t \mathcal{E}_{ijkl}(t,\tau,x)(\cdot)\,d\tau \qquad (2,1)$$

с граничными условиями

$$u_i|_{\Sigma_1}=\varphi_1, \qquad (\delta_{ik}+u_{i,k})\delta_{kj}n_j|_{\Sigma_2}=p_i, \quad \Sigma_1+\Sigma_2=\Sigma; \qquad (2,2)$$

здесь u_i, n_i — компоненты вектора смещения и нормали к поверхности Σ соответственно; ε_{ij}, σ_{ij} — тензоры деформаций и напряжений, γ_{kl} — коэффициенты теплового расширения, $\theta=T-T_0$ — приращение температуры, $\bar{E}_{ijkl}$ — операторы анизотропной термовязкоупругости, содержащие в качестве функционального параметра температуру ([4, 5]). Система (2,1) и граничные условия (2,2) получаются на основе кинематических допущений о малости удлинений и сдвигов в теле по сравнению с углами поворота ([6]).

Предполагаем, что внешние силы могут зависеть от смещений u_i и градиента $u_{i,j}$:

$$(f_ip_i)=\lambda[(f_{i0}p_{i0})+(a_{ij}\alpha_{ij})u_j+\ldots(B_{ijk}\beta_{ijk})u_{j,k}+\ldots]. \qquad (2,3)$$

Это выражение содержит в себе широкий класс неконсервативных внешних нагрузок, в том числе и следящие ([7]).

Допустим, что при некотором значении внешних сил известно решение нелинейной задачи (2,1), (2,2): λ_0, $\mathring{f}_i$, $\mathring{p}_i\sim\mathring{u}_i$, $\mathring{\varepsilon}_{ij}$, $\mathring{\sigma}_{ij}$. Как обычно считаем, что $\mathring{u}_{i,j}$ мало, $\mathring{\sigma}_{ij}$ стационарно. К этому типу относятся основные безизгибные напряженно-деформированные состояния. Устойчивость этого решения исследуем методом малых возмущений. Полагаем $\lambda=\lambda_0+\varepsilon$, $f_i=$

$=\overset{\circ}{f}_i+\tilde{f}_i$, $p_i=\overset{\circ}{p}_i+\tilde{p}_i$. Решение задачи (2,1), (2,2) ищем в виде $u_i=\overset{\circ}{u}_i+\tilde{u}_i$. Получаем для вектора возмущений $\tilde{\mathbf{u}}=u_i\mathbf{l}_i$

$$\rho\,\partial^2\tilde{\mathbf{u}}/\partial t^2+L\tilde{\mathbf{u}}=\tilde{\mathbf{f}}+M(\tilde{\mathbf{u}}),\qquad \tilde{\mathbf{u}}|_{\Sigma_1}=0,\qquad \Lambda\tilde{u}|_{\Sigma_2}=\tilde{\mathbf{p}}+N(\tilde{\mathbf{u}}),\tag{2,4}$$

где введены линейные операторы

$$(L\Lambda)\tilde{\mathbf{u}}=-\mathbf{e}_i\{[\bar{\bar{E}}_{ijkl}\tilde{u}_{k,\,l}+\bar{\sigma}_{sj}\tilde{u}_{i,\,s}](\cdot\ ,_j n_j)+\lambda_0[(a_{ij}\alpha_{ij})\tilde{u}_i+(b_{ijk}\beta_{ijk})\tilde{u}_{j,\,k}]\}\tag{2,5}$$

и нелинейные операторы M и N, которые не выписываем из-за громоздкости.

Поведением во времени решений нелинейной задачи (2,4) определяется устойчивость либо неустойчивость исследуемого стационарного решения. В рамках принципа линеаризации такое заключение можно сделать на основе анализа решений линейной задачи

$$\rho\,\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2+L\mathbf{u}=\mathbf{f},\qquad \mathbf{u}|_{\Sigma_1}=0,\ \ \Lambda\mathbf{u}|_{\Sigma_2}=\mathbf{p};\tag{2,6}$$

здесь и в дальнейшем знак волны у возмущений опущен.

Как видно из (2,5), в L и Λ входят операторы термовязкоупругости, не удовлетворяющие условию замкнутого цикла. Последнее означает, что

$$\bar{E}_{ijkl}e^{i\omega\tau}\neq E_{ijkl}(\omega)\,e^{i\omega t},\tag{2,7}$$

где $E_{ijkl}(\omega)$ — комплексная функция от ω, т. е. операторы $\bar{E}_{ijkl}$ не оставляют подобными периодические функции. Поэтому прямой переход в (2,6) к спектральной задаче относительно характеристического показателя невозможен.

Решение задачи (2,6) ищем в виде

$$\mathbf{u}=e^{i\omega t}\mathbf{v}(x,\ t),\quad \mathbf{v}(x,\ t)\to\mathbf{v}_0(x),\quad t\to\infty.\tag{2,8}$$

Вектор-функции $\mathbf{v}$ будем называть стабилизирующимся во времени. Для определения $\mathbf{v}$ при достаточно больших временах t получаем квазистатическую задачу

$$L_\omega\mathbf{v}-\omega^2\mathbf{v}=\mathbf{f},\quad \mathbf{v}|_{\Sigma_1}=0,\quad \Lambda_\omega\mathbf{v}|_{\Sigma_2}=\mathbf{p},\tag{2,9}$$

где операторы L_ω, Λ_ω отличаются соответственно от L и Λ только тем, что ядра наследственности в $\bar{E}_{ijkl}$ домножаются на $e^{-i\omega(t-\tau)}$. Представим их в виде

$$L_\omega=L_0-\int_0^t L(t,\tau,\omega)\,(\cdot)\,d\tau,\qquad \Lambda_\omega=\Lambda_0-\int_0^t\Lambda(t,\tau,\omega)\,(\cdot)\,d\tau.\tag{2,10}$$

Через L_0, Λ_0 обозначены «упругие» части операторов L, Λ, которые получаются при $t=0$, а операторы $L(t,\tau,\omega)$, $\Lambda(t,\tau,\omega)$ легко выписать.

Вспомогательные вектор-функции $\mathbf{g}$ и $\mathbf{q}$ вводим посредством «упругой» граничной задачи

$$(L_0-\omega^2 I)\mathbf{v}=\mathbf{g},\ \ \mathbf{v}|_{\Sigma_1}=0,\ \ \Lambda_0\mathbf{v}|_{\Sigma_2}=\mathbf{q}.\tag{2,11}$$

Пусть задача (2,11) однозначно разрешима. Это означает, что параметры ω, λ_0' не принадлежат спектру упругой задачи. Тогда ее решение можно представить через операторы Грина

$$\mathbf{v}=G\mathbf{g}+\Gamma\mathbf{q},\tag{2,12}$$

причем G и Γ определяются так:

$$\begin{aligned}&(L_0-\omega^2)\mathbf{v}'=\mathbf{g},\ \ \mathbf{v}'|_{\Sigma_1}=\Lambda_0\mathbf{v}'|_{\Sigma_2}=0,\ \ \mathbf{v}'=G\mathbf{g},\\&(L_0-\omega^2)\mathbf{v}''=0,\ \ \mathbf{v}''|_{\Sigma_1}=0,\ \ \mathbf{v}''|_{\Sigma_2}=\mathbf{q},\ \ \mathbf{v}''=\Gamma\mathbf{q}.\end{aligned}\tag{2,13}$$

Используя определения (2,13) операторов G, Γ, основную задачу (2,9) сводим к системе двух операторных уравнений Вольтерра относительно вспомогательных вектор-функций $\mathbf{g}$, $\mathbf{q}$, которую обычным приемом приводим к одному операторному уравнению Вольтерра относительно пары векторов

$$h-Vh=r, \quad V(\omega,\lambda_0)=\int_0^t A(t,\tau,\omega,\lambda_0)(\cdot)\,d\tau, \tag{2,14}$$

$$h=\begin{pmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{q} \end{pmatrix}, \quad r=\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}, \quad A=\begin{pmatrix} LG & L\Gamma \\ \Lambda G & \Lambda\Gamma \end{pmatrix}. \tag{2,15}$$

3. Поведение возмущений во времени определяется расположением спектра оператора V. При естественных предположениях относительно ядер $Э_{ijkl}$ оператор V при любом конечном t имеет единственную точку спектра, равную нулю. Из этого следует устойчивость на любом конечном интервале времени в том смысле, что малым изменениям правых частей $\boldsymbol{r}$ будут соответствовать малые изменения решения h и, следовательно, $\mathbf{u}$. Последнее вытекает из ограниченности операторов G, Γ и представлений (2,12), (2,8).

Таким образом, основным является вопрос об асимптотической устойчивости. Пусть $r\to 0$ при $t\to\infty$. Поведение решения уравнения (2,14) при $t\to\infty$ будет зависеть от расположения спектра оператора V, рассматриваемого на полуоси. Обозначим его через $\sigma(V)$. Спектр $\sigma(V)$ представляет собой ограниченное связное множество в комплексной плоскости, содержащее точку нуль. Тогда из уравнения (2,14) сразу следует, что в случае, когда единица является регулярной точкой оператора V:

$$1\notin\sigma(V), \tag{3,1}$$

имеет место асимптотическая устойчивость: при $r\to 0$, $h\to 0$, $t\to\infty$. По той же причине, что и выше, возмущения $\mathbf{u}\to 0$, $t\to\infty$. Совокупность параметров λ_0, ω, обеспечивающая выполнение условия (3,1), образует область асимптотической устойчивости. При изменении λ_0, ω спектр $\sigma(V)$ расширяется. Как только он охватит единицу, асимптотическая устойчивость теряется. Критическим является случай, когда единица попадает на границу спектра.

Удобным в практическом отношении способом изучения спектра оператора V является следующий. Введем предельный для V оператор

$$\Pi=\lim_{t\to\infty} V. \tag{3,2}$$

Имеет место тесная связь между спектрами операторов Π и V. Оператор Π, как следует из его определения, является чисто координатным. Будем считать его фредгольмовым (что обычно имеет место в приложениях). Рассмотрим оператор

$$\Pi_\varkappa=\varkappa I-\Pi. \tag{3,2$'$}$$

Пусть $\varkappa_k$, φ_k — его собственные элементы. Ограничимся ради простоты случаем простых собственных значений. Справедливы

Утверждения. а) *Спектральный радиус оператора V равен наибольшему модулю собственного числа оператора* Π:

$$r_\sigma(V)=|\varkappa_1|, \quad |\varkappa_1|=\max|\varkappa_k|; \quad k=1,2,\ldots \tag{3,3}$$

б) *Собственное число оператора Π с наибольшим модулем расположено на границе спектра оператора V.*

б) *На множестве непрерывных и стабилизирующихся по времени вектор-функций уравнение*

$$V_{\varkappa_1}h=(\varkappa_1 I-V)h=r \tag{3,4}$$

корректно разрешимо на полуоси тогда и только тогда, когда выполнены условия

$$\lim_{t\to\infty}(r,\varphi_1^*)=0, \quad \lim_{t\to\infty}(V_{\varkappa_1}^{-1}r,\varphi_1)=C<\infty, \tag{3,5}$$

причем для решения имеет место представление

$$h=V_{\varkappa_1}^{-1}r_*+C\varphi_1, \quad r_*=r-CV_{\varkappa_1}\varphi_1. \tag{3,6}$$

Здесь φ_1^* *— собственная функция сопряженного для* П *оператора, а скобки в* (3,5), *как обычно, означают скалярное произведение, обусловленное оператором* П.

Эти результаты позволяют изучать критические параметры и закритический режим для возмущений. Сравнивая уравнения (2,14) и (3,4), получаем уравнение критических параметров

$$\varkappa_1(\lambda_0, \omega_0)=1, \tag{3,7}$$

которое в действительности представляет собой систему двух уравнений относительно двух неизвестных:

$$\operatorname{Re}\varkappa_1(\lambda_0, \omega_0)=1, \quad \operatorname{Im}\varkappa_1(\lambda_0, \omega_0)=0. \tag{3,8}$$

Решения этой системы определяют характер потери устойчивости. В случае $\omega_0=0$ имеет место квазистатический закритический режим, т. е. под действием возмущений $r\to 0$, $t\to\infty$ тело переходит в новое равновесное состояние, которое достигается лишь при $t\to\infty$. Если $\omega_0\neq 0$, то закритическим будет режим, который при $t\to\infty$ вырождается в автоколебания.

4. Значительный интерес представляет расчет закритических состояний. В нашем случае это удается сделать посредством подходящей модификации процедуры Ляпунова – Шмидта ([7], [8]). Нелинейное операторное уравнение Вольтерра, соответствующее нелинейной задаче для возмущений (2,4), принимает вид

$$h-Vh=r+R(h), \tag{4,1}$$

где нелинейный оператор R определяется операторами M и N из (2,4). Пусть уравнение (4,1) формально разрешимо относительно степенных разложений

$$h=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{\nu_k}h_k, \quad \omega=\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon^{\mu_k}\omega_k; \tag{4,2}$$

здесь ν_k, μ_k — положительные рациональные числа. Задача состоит в определении коэффициентов h_k, ω_k. Подставляя (4,2) в (4,1), получим последовательность линейных задач:

$$h_k-Vh_k=r_k+h_k, \quad h_0=0, \quad h_k|h_{k-1}, h_{k-2}, \ldots, h_1, \tag{4,3}$$

причем оператор V соответствует критическим значениям параметров $\lambda=\lambda_0$, $\omega=\omega_0$. Поэтому каждая из этих задач будет корректно разрешима, если выполняются условия (3,5):

$$\lim_{t\to\infty}(r_k+h_k, \varphi_1^*)=0, \quad \lim_{t\to\infty}((1-V)^{-1}(r_k+h_k), \varphi_1)=C_k<\infty, \tag{4,4}$$

Эта система скалярных уравнений оказывается достаточной для последовательного определения чисел C_k, ω_k. Решение каждого из уравнений (4,3) представляется в виде (3,6). При достаточно малом значении ε ряды (4,2) сходятся и описывают все множество малых решений, что является обоснованием принципа линеаризации в термовязкоупругой устойчивости.

5. Опираясь на изложенную методику, исследована устойчивость анизотропных вязкоупругих стержней и пластин при различных термосиловых загружениях. Изучены эффекты влияния термовязкости на критические параметры, и закритическое поведение. Результаты находят применение при анализе прочности и долговечности различных армированных тонкостенных конструкций из материалов на полимерной основе.

Ростовский государственный
университет

Поступило
2 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *V. V. Bolotin, N. I. Zhinzher*, Int. J Sol. and Struct., v. 5, № 9 (1969). [2] *V. Volterra*, Fonctions de lignes, Paris, 1913. [3] *Ю. Н. Работнов*, Ползучесть элементов конструкций, М., 1966. [4] *А. А. Ильюшин, Б. Е. Победря*, Основы математической теории термовязкоупругости, М., 1970. [5] *В. Г. Громов*, Мех. тверд. тела, в. 5 (1974). [6] *В. В. Новожилов*, Теория упругости, М.– Л., 1958. [7] *М. М. Вайнберг, В. А. Треногин*, Теория ветвления решений нелинейных уравнений, М., 1969. [8] *В. Г. Громов, Г. Н. Раецкий*, Пластические массы, т. 7, № 12 (1971).