

Член-корреспондент АН СССР В. В. КАФАРОВ, В. Г. ВЫГОН,
К. Е. ЗАХАРИЕВА

СТАЦИОНАРНЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА РАДИАЛЬНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ

Экспериментальная оценка коэффициента поперечного перемешивания — необходимый момент в технологических исследованиях. Существующие методы (¹, ²) основаны на использовании приближенного решения диффузионного уравнения переноса. При этом поиск указанного коэффициента (решение обратной задачи) осуществляется итеративным способом с коррекцией графика решения уравнения переноса по экспериментальному профилю концентрации. Точность такого метода определения коэффициента радиального перемешивания низка и связана с большим объемом вычислительных работ, так как полное решение уравнения переноса получается в виде асимптотического знакопеременного ряда по бесселевым функциям, обладающего плохой сходимостью.

В настоящей работе предлагается точный аналитический метод решения обратной задачи отыскания параметров диффузионного уравнения по экспериментальным данным.

Организация эксперимента предполагает стационарный способ ввода трассера. Использование точечного источника трассера мощностью q_0 , расположенного по оси аппарата на расстоянии l от сечения $z=0$, в которое вводится основной поток, позволяет определить стационарный профиль концентрации трассера как функции интенсивности продольного (осевого) и поперечного (радиального) перемешивания.

Исходное уравнение переноса массы, записанное в цилиндрических координатах, имеет вид

$$E_z \frac{\partial^2 c}{\partial z^2} - U \frac{\partial c}{\partial z} + E_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} \right) + q(z, r) = 0, \quad (1)$$

где $q(z, r)$ — функция источника. Учитывая свойства точечного источника, функцию $q(z, r)$ можно представить как произведение

$$q(z, r) = q_0 \delta(z-l) \frac{1}{r} \delta(r), \quad (2)$$

где $\delta(z-l)$ и $\delta(r)$ — дельта-функции Дирака, q_0 (г/сек) — мощность источника, характеризуемая плотностью потока трассера.

Граничные условия для замкнутого с обоих торцов цилиндрического аппарата имеют вид:
на торцевых границах

$$c(0, r) - \frac{E_z}{U} \frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial z} \Big|_{z=H} = 0; \quad (4)$$

на стенках аппарата

$$\frac{\partial c}{\partial r} \Big|_{r=R} = 0. \quad (5)$$

Метод решения уравнения (1) с граничными условиями (3) — (5) основан на использовании математического аппарата интегрального преобразования Ханкеля ⁽³⁾. Преобразование Ханкеля, для которого основой является бесселева функция первого рода, даст переход к изображению в форме

$$\tilde{c}(z, \mu) = \chi[c(z, r)] = \int_0^R I_0\left(\mu \frac{r}{R}\right) c(z, r) r dr. \quad (6)$$

Применение указанного преобразования к исходному уравнению (1) приводит к выражению

$$E_z \frac{d^2 \tilde{c}}{dz^2} - U \frac{d \tilde{c}}{dz} - E_r \frac{\mu^2}{R^2} \tilde{c} = -q_0 \delta(z-l). \quad (7)$$

Решение неоднородного уравнения (7) осуществляется методом вариации постоянных ⁽⁴⁾, которые находятся с учетом граничных условий (3) и (4).

Для участка, ограниченного координатами $0 \leq z \leq l$, решение в преобразованном по Ханкелю виде приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \tilde{c}(z, \mu) = \\ = \frac{q_0}{Ua} \frac{\{(1+a)e^{b(1+a)(H-l)} - (1-a)e^{b(1-a)(H-l)}\} \{(1+a)e^{b(1+a)z} - (1-a)e^{b(1-a)z}\}}{\{(1+a)^2 e^{b(1+a)H} - (1-a)^2 e^{b(1-a)H}\}} \end{aligned} \quad (8)$$

Соответственно, для участка $l < z \leq H$

$$\begin{aligned} \tilde{c}(z, \mu) = \frac{q_0}{Ua} \frac{e^{b(1-a)H} \{(1-a)^2 e^{b(1+a)(z-l)} - (1-a^2) e^{-b(1-a)l} e^{b(1+a)z}\}}{\{(1+a)^2 e^{b(1+a)H} - (1-a)^2 e^{b(1-a)H}\}} + \\ + \frac{q_0}{Ua} \frac{e^{b(1+a)H} \{(1+a)^2 e^{b(1-a)(z-l)} - (1-a^2) e^{-b(1+a)l} e^{b(1-a)z}\}}{\{(1+a)^2 e^{b(1+a)H} - (1-a)^2 e^{b(1-a)H}\}}, \end{aligned} \quad (9)$$

где

$$a = \sqrt{1 + 4E_z E_r \mu^2 / U^2 R^2} \quad \text{и} \quad b = U/2E_z.$$

С практической точки зрения наибольший интерес представляет верхний участок, для которого $0 \leq z \leq l$, так как информация о профиле концентрации трассера вдоль радиуса на данном участке допускает одновременное определение констант E_z (осевого) и E_r (радиального) перемешивания. Поэтому в дальнейшем ограничиваемся рассмотрением этого участка. Определение функции оригинала $c(z, r)$ осуществлено в соответствии с правилами обратного преобразования. При этом принимается во внимание, что полюса μ_k в формуле обратного преобразования

$$c(z, x) = \frac{2}{R^2} \left[\tilde{c}(z, 0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{I_0(\mu_k, x)}{I_2(\mu_k)} \tilde{c}(z, \mu_k) \right],$$

где $x=r/R$ — относительный радиус, являются корнями уравнения $I_1(\mu) = 0$, полученного при использовании граничного условия (5).

С учетом указанного окончательное решение для исходного уравнения (1) приобретает вид

$$\begin{aligned} c(z, x) = \frac{2q_0}{R^2 U} \sum_{k=0} \frac{I_0(\mu_k, x) \{(1+a_k)e^{b(1+a_k)(H-l)} - (1-a_k)e^{b(1-a_k)(H-l)}\} \times \\ \times \{(1+a_k)e^{b(1+a_k)z} - (1-a_k)e^{b(1-a_k)z}\}}{I_0^2(\mu_k) \{(1+a_k)^2 e^{b(1+a_k)H} - \\ - (1-a_k)^2 e^{b(1-a_k)H}\}}, \end{aligned} \quad (10)$$

где $a_k = \sqrt{1 + 4E_z E_r \mu_k / UR^2}$, а μ_k — корни уравнения $I_1(\mu) = 0$, включая нулевой $\mu_0 = 0$. Решение (10), справедливое для участка $0 \leq z \leq l$, отображает характер распределения концентрации по высоте и радиусу аппарата (рис. 1). Однако его использование для точного определения констант E_z и E_r затруднительно ввиду плохой сходимости полученного ряда (10) и необходимости большого объема вычислительных работ при итеративном поиске констант.

Более точный и простой метод определения коэффициентов E_z и E_r по профилю концентрации может быть основан на непосредственном использовании преобразования Ханкеля как способа интегральной оценки. Данный способ аналогичен методу моментов, применяемому при определении параметров математических моделей по временным функциям отклика.

Из свойств преобразования по Ханкелю

$$\tilde{c}(z, \mu) = R^2 \int_0^1 c(z, x) I_0(\mu, x) x dx \quad (11)$$

следует

$$\int_0^1 c(z, x) x dx = \frac{\tilde{c}(z, 0)}{R^2}. \quad (12)$$

Далее при последовательном дифференцировании $\tilde{c}(z, \mu)$ по параметру μ при наложении условия $\mu = 0$ в значениях производных находим

$$\left. \frac{d[\tilde{c}(z, \mu)]}{d\mu} \right|_{\mu=0} = - \int_0^1 c(z, x) I_1(\mu, x) x^2 dx \Big|_{\mu=0} = 0, \quad (13)$$

$$\left. \frac{d^2[\tilde{c}(z, \mu)]}{d\mu^2} \right|_{\mu=0} = \int_0^1 c(z, x) \frac{I_0(\mu) - I_2(\mu)}{2} x^3 dx \Big|_{\mu=0} = - \frac{1}{2} \int_0^1 c(z, x) x^3 dx. \quad (14)$$

Использование уравнений (12) и (14) в сочетании с решением (8) приводит к окончательным результатам:

$$\int_0^1 c(z, x) x dx = \frac{q_0}{UR^2} \exp \left\{ - \frac{U}{E_z} (l-z) \right\}, \quad (15)$$

$$\int_0^1 c(z, x) x^3 dx = \frac{q_0}{UR^2} \frac{8E_z E_r}{U^2 R^2} \left\{ \left[1 + b(l-z) e^{-b(l-z)} - \frac{1}{2} [e^{-2bz} + e^{2b(H-l)}] \right] \right\}. \quad (16)$$

Для практики удобнее пользоваться соотношениями

$$\int_0^1 c(z_1, x) x dx \Big/ \int_0^1 c(z_2, x) x dx = \exp \left\{ - \frac{U}{E_z} (z_1 - z_2) \right\}, \quad (17)$$

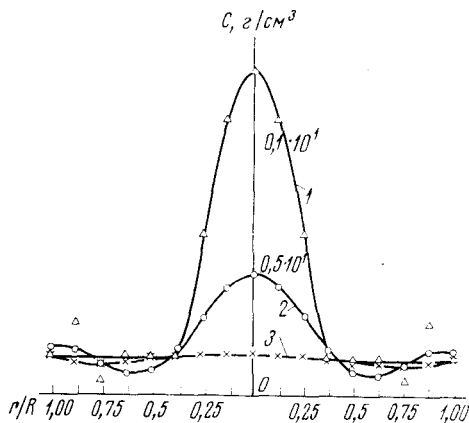


Рис. 1. Радиальная кривая концентрации выше точки ввода трассера. 1 — при $E_z = 2$, $E_r = 0,2$ см²/сек, $|l-z| = 10$ см; 2 — при $E_z = 2$, $E_r = 0,4$ см²/сек, $|l-z| = 10$ см; 3 — при $E_z = 2$, $E_r = 0,4$ см²/сек, $|l-z| = 20$ см

$$\begin{aligned}
& \int_0^1 c(z_1, x) x^3 dx / \int_0^1 c(z_1, x) x dx = \\
& = \frac{8E_z E_r}{U^2 R^2} \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left[\frac{U}{E_z} (l - z_1) - \exp \left\{ -\frac{U}{E_z} z_1 \right\} - \exp \left\{ -\frac{U}{E_z} (H - l) \right\} \right] \right\}.
\end{aligned}
\tag{18}$$

Формула (17) используется для предварительного определения E_z , (18) применяется затем для определения E_r при установленном E_z .

Решены прямая и обратная задача для определения коэффициентов осевой и радиальной диффузии. Получены расчетные соотношения для определения констант E_z и E_r по интегральным оценкам профилей концентрации.

Московский химико-технологический институт
им. Д. И. Менделеева

Поступило
4 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ K. V. Bischoff, O. Levenspiel, Chem. Eng. Sci., v. 17, 245 (1962). ² A. M. Розен, Ю. Т. Рубежной, Теоретические основы химической технологии, т. 5, № 6, 842 (1971). ³ И. Снеддон, Преобразование Фурье, М., 1955. ⁴ Г. Корн, Т. Корн, Справочник по математике для научных работников и инженеров, «Наука», 1973.