Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 4

УДК 550.311 *ГЕОФИЗИКА*

В. П. КЕОНДЖЯН, член-корреспондент АН СССР А. С. МОНИН

МОДЕЛЬ ГРАВИТАЦИОННОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ НЕДР ПЛАНЕТ

Эволюция планеты в целом — это прежде всего эволюция ее внутренней структуры. При не слишком интенсивных процессах перемешивания она сводится к гравитационной дифференциации веществ и формированию оболочек планеты (а выделяющаяся при этом потенциальная энергия вносит важный вклад в развитие тектонических процессов).

Внутреннюю структуру планеты на разных стадиях ее эволюции можно рассчитывать при помощи уравнения гидростатики, которое в пренебрежении вращением планеты и в приближении сферической симметрии имеет вид

$$\frac{dp}{dr}=-\rho g, \quad g=\frac{Gm}{r^2}, \quad m=4\pi\int_0^r \rho r^2\,dr, \tag{1}$$

где p — давление, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, r — расстояние от центра планеты, G — гравитационная постоянная.

Рассмотрим модель планеты с баротропным уравнением состояния $\rho=\rho(p)$, что представляется допустимым приближением для твердых планет; тогда знание уравнения состояния позволяет проинтегрировать уравнение (1). Пусть планета состоит из n веществ с удельными концентрациями $C_1, \dots, C_n$, уравнения состояния которых аппроксимируются функциями

$$\rho=\rho_k(p)=\alpha_k\rho_0(p), \quad \rho_0=\left(\rho_s^2+\frac{p}{2\pi GL^2}\right)^{1/2}, \tag{2}$$

где $\alpha_1>\alpha_2>\dots>\alpha_n$, ρ_s и L — некоторые постоянные; тогда при любых давлениях будет $\rho_1>\rho_2>\dots>\rho_n$.

Локальное уравнение состояния вещества планеты приводится к виду

$$p=\frac{2\pi GL^2}{\alpha^2}(\rho^2-\alpha^2\rho_s^2), \quad \alpha=\left(\sum\frac{C_k}{\alpha_k}\right)^{-1}. \tag{3}$$

При таком уравнении состояния уравнение гидростатики (1) интегрируется аналитически в каждом химически однородном слое планеты (с постоянными концентрациями C_k) и имеет общий интеграл

$$\rho=\frac{1}{\xi}(A\sin\xi+B\cos\xi), \quad \xi=\frac{\alpha r}{L} \tag{4}$$

(см. ([1]), § 82).

В начальный момент гравитационной дифференциации концентрации C_k постоянны во всей планете, и в (4) следует положить

$$A=\frac{\alpha\rho_s\xi_n}{\sin\xi_n}, \quad \xi_n=\frac{\alpha r_n}{L}; \quad B=0;$$
$$\xi_n(1-\xi_n\operatorname{ctg}\xi_n)=\frac{\alpha^2M}{4\pi\rho_sL^3}, \tag{5}$$

где r_n — радиус планеты, определяемый по ее массе M последним из этих соотношений. По завершении гравитационной дифференциации планета распадается на n слоев $r_{k-1}\leqslant r\leqslant r_k$, $r_0=0$, распределения плотности в которых будут даваться формулой (4) с различными значениями α, A, B в каждом слое: в k-ом слое $\alpha=\alpha_k$, а $3n$ параметров r_k, A_k, B_k, определяющих такое расслоение, находятся из условий $\rho<\infty$ при $r=0$, $p=0$ при $r=r_n$, непрерывности p и g на границах слоев, т. е.

$$\frac{\rho(r_k-0)}{\alpha_k}=\frac{\rho(r_k+0)}{\alpha_{k+1}} \qquad \frac{\rho'(r_k-0)}{\alpha_k^2}=\frac{\rho'(r_k+0)}{\alpha_{k+1}^2}$$

и, наконец, равенства масс слоев значениям C_kM.

Рассмотрим, например, планету, состоящую из двух веществ: «ядерного» с концентрацией $C_1=C$ и параметром $\alpha_1>1$ уравнения состояния (2) и «мантийного» с концентрацией $C_2=1-C$ и параметром уравнения состояния $\alpha_2=1$. Рассчитаем промежуточную фазу гравитационной дифференциации, на которой доля x (масса CxM) «ядерного» вещества отдифференцировалась и образовала ядро планеты, а остальное «ядерное» вещество распределено вместе с «мантийным» по оболочке планеты с постоянными концентрациями $(C-Cx)/(1-Cx)$ и $(1-C)/(1-Cx)$. Уравнение состояния вещества оболочки на этой фазе дифференциации имеет вид (3) с параметром $\alpha=\beta\alpha_1$, где

$$\beta=\frac{\alpha}{\alpha_1}=(1-Cx)\,[\alpha_1(1-C)+C(1-x)\,]^{-1}. \tag{6}$$

При помощи указанных выше условий (но пока еще без фиксации масс слоев) для зависимости плотности от безразмерной радиальной координаты $\xi=\alpha_1 r/L$ получаются формулы

$$\frac{\rho(\xi)}{\alpha_1\rho_s}=\begin{cases}\dfrac{\xi_2\cos\varphi\sin\xi}{\xi\cos\psi\sin\xi_1}, & 0\leqslant\xi<\xi_1,\\[2ex] \dfrac{\beta\xi_2\cos(\beta\xi-\beta\xi_1+\varphi)}{\xi\cos\psi}, & \xi_1<\xi\leqslant\xi_2;\end{cases} \tag{7}$$

$$\cos\varphi=\frac{1}{a\gamma},\qquad \sin\varphi=\frac{1}{\gamma\xi_1}\left(1-\frac{1}{\beta a}\right),\qquad a=1-\xi_1\operatorname{ctg}\xi_1,$$

$$\gamma=\left[\frac{1}{a^2}+\frac{1}{\xi_1^2}\left(1-\frac{1}{\beta a}\right)^2\right]^{1/2},\qquad \psi=\beta(\xi_2-\xi_1)+\varphi.$$

Это распределение плотности и соответствующее распределение давления (3) зависят от пяти параметров: радиусов ядра и всей планеты r_1 и r_2 и величин $\alpha_1\rho_s$, L/α_1 и β. Фиксация масс ядра CxM и оболочки $(1-Cx)M$ и момента инерции планеты I дают следующие три связи между этими параметрами:

$$\frac{a\xi_2\cos\varphi}{\cos\psi}=CxM_1;$$

$$\frac{\xi_2}{\beta\cos\psi}(\beta\xi_2\sin\psi-\beta\xi_1\sin\varphi+\cos\psi-\cos\varphi)=(1-Cx)M_1; \tag{8}$$

$$2\xi_1^2+a(\xi_1^2-6)+\frac{1}{\beta^3\cos\varphi}[\beta^3(\xi_2^3\sin\psi-\xi_1^3\sin\varphi)+3\beta^2(\xi_2^2\cos\psi-\xi_1^2\cos\varphi)-$$

$$-6\beta(\xi_2\sin\psi-\xi_1\sin\varphi)-6(\cos\psi-\cos\varphi)\,]={}^3/_2I_1M_1\frac{\xi_2\cos\psi}{\cos\varphi},$$

$$M_1=\frac{\alpha_1^2M}{4\pi\rho_sL^3},\qquad I_1=(Mr_2^2)^{-1}I.$$

Применим (7), (8) к современному состоянию Земли, задав ее массу $M=5{,}98\cdot 10^{27}$ г, средний радиус $r_2=6371$ км, безразмерный момент инерции $I_1=0{,}3308$, известный из сейсмических данных радиус ядра $r_1=3451$ км и, наконец, относительную массу ядра $Cx=0{,}3218$, соответствующую построенной с использованием сейсмических данных модели «Земля 2» из книги [2]. При таких значениях параметров из (8) получается $\alpha_1\rho_s=5{,}754$ г/см^3, $L/\alpha_1=2390$ км и $\beta=0{,}6136$; при этом на границе ядра плотность убывает изнутри наружу скачком от 9,52 до 5,84 г/см^3 и давление равно 1,38 Мбар, а в центре Земли плотность равна 13,86 г/см^3 и давление 3,82 Мбар без существенных отличий от модели «Земля 2».

Если принять, что мантия Земли сейчас состоит из пиролита Рингвуда, содержащего по массе 6,58% Fe, и, следуя О.Г. Сорохтину [3], признать «ядерным» веществом Fe_2O, то концентрация последнего в мантии будет равна 7,52%. С другой стороны, она равна $(C-Cx)/(1-Cx)$, откуда при $Cx=0{,}3218$ получается $C=0{,}373$ и доля уже отдифференцировавшегося «ядерного» вещества оказывается равной $x=0{,}863$, так что процесс гравитационной дифференциации уже недалек до завершения. Наконец, из (6) получается параметр состояния «ядерного» вещества $\alpha_1=1{,}681$; следовательно, $\rho_s=3{,}42$ г/см^3, $L=4017$ км.

Зная α_1, ρ_s, L и C, мы можем вычислять параметры внутренней структуры Земли на различных стадиях x гравитационной дифференциации ее недр. Так, по формуле (6) вычисляется β; затем из первых двух уравнений (8) находятся r_1 и r_2; после этого при помощи (7) находятся плотность ρ_c в центре Земли и скачок плотностей ρ_1^-, ρ_1^+ на границе ядра; по формуле (3) вычисляются давления p_c и p_1 в центре Земли и на границе ядра; из третьего уравнения (8) находится момент инерции I, а по формуле $\omega/\omega_*=I_*/I$ — угловая скорость вращения Земли (звездочка обозначает современные значения). Наконец, вычисляется освободившаяся из-за дифференциации гравитационная энергия

$$\Pi(x)=P(0)-P(x),$$

где

$$P(x)=-12\pi\int_0^{r_2} pr^2\,dr=$$

$$=-12\pi^2 G(\alpha_1\rho_s)^2\left(\frac{L}{\alpha_1}\right)^3 r_2^2\left[\left(\frac{\cos\varphi}{\cos\psi\sin\xi_1}\right)^2(\xi_1-\sin\xi_1\cos\xi_1)+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\beta\cos^2\psi}(\psi+\sin\psi\cos\psi-\sin\varphi\cos\varphi)-\frac{2}{3}\xi_2\right].$$

Результаты расчетов приведены в табл. 1.

В табл. 1 расстояния даны в километрах, плотности — в г/см^3, давления — в мегабарах, П — в единицах 10^{38} эрг.

Таблица 1

x	r_1	r_2	ρ_c	ρ_1+	ρ_1-	p_c	p_1	I/I_*	ω/ω_*	П
0	0	6393	11,34	—	—	2,30	—	1,12	0,89	0
0,2	2091	6386	12,38	10,86	7,43	2,89	2,04	1,09	0,92	0,32
0,4	2652	6381	12,93	10,45	6,96	3,23	1,83	1,06	0,94	0,73
0,6	3043	6376	13,38	10,05	6,48	3,51	1,63	1,03	0,97	1,11
0,8	3361	6372	13,75	9,65	6,00	3,75	1,44	1,01	0,99	1,49
0,863	3451	6371	13,86	9,52	5,84	3,82	1,38	1	1	1,61
1	3635	6368	14,08	9,25	5,50	3,97	1,25	0,98	1,02	1,86

С ростом доли x отдифференцировавшегося «ядерного» вещества радиус ядра r_1, естественно, растет, а давление p_1 и плотности ρ_1^+ и ρ_1^- на границе ядра убывают; давление и плотность в центре Земли заметно растут. Момент инерции Земли за всю ее историю убывает на 14%, на столько же возрастает скорость вращения Земли — эффект, противоположный приливному трению, но в несколько раз слабее. Радиус Земли r_2 слегка убывает — за всю ее историю всего на 25 км, чего, конечно, недостаточно для контракционного объяснения тектоногенеза, да и сама контракция на 25 км представляется незначимой (зависящей от модели).

Выделившаяся за $4{,}5\cdot 10^9$ лет потенциальная энергия П на 80% превышает оцененное Е. А. Любимовой (4) радиогенное тепло $0{,}9\cdot 10^{38}$ эрг, но их сумма все же недостаточна для полного расплавления Земли (по (4) необходимо $3{,}2\cdot 10^{38}$ эрг), а ведь еще имели место теплопотери через поверхность (сейчас порядка $(0{,}1-0{,}15)\cdot 10^{38}$ эрг в $1\cdot 10^9$ лет). Эти оценки представляются не противоречащими современному разогреву недр Земли с ее расплавленным внешним ядром, тем более что по А. П. Виноградову имеется возможность частичной дифференциации «ядерного» вещества еще в процессе конденсации допланетного облака (начальное $x=x_0>0$ и $\Pi(x)=P(x_0)-P(x)$).

К изложенным результатам нетрудно внести небольшие поправки, создаваемые наличием легкого вещества земной коры, а также тепловым расширением веществ, как это делал Ф. Берч (5), проводивший численное интегрирование уравнений (1) при использовании уравнения состояния $p=K[(\rho/\rho_0)^{7/3}-(\rho/\rho_0)^{5/3}]$ с разными параметрами K и ρ_0 для мантийного и «ядерного» веществ.

Институт океанологии им. П. П. Ширшова
Академии наук СССР
Москва

Поступило
16 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *К. П. Станюкович,* Неустановившиеся движения сплошной среды, 1955. [2] *В. Н. Жарков, В. П. Трубицын, П. В. Самсоненко,* Физика Земли и планет, «Наука», 1971. [3] *О. Г. Сорохтин,* ДАН, т. 198, № 6 (1971). [4] *Е. А. Любимова,* Термика Земли и Луны, «Наука», 1968. [5] *F. Birch,* J. Geophys. Res., v. 70, № 24 (1965).