

Г. Г. ЧЕРНЫХ, М. Е. БОГУШ, Э. И. БЕЛЯКОВИЧ, П. Г. ПОЗДНЯКОВ

**О КОЛЕБАНИЯХ КВАРЦЕВЫХ БРУСКОВ**

(Представлено академиком Н. В. Беловым 24 V 1974)

Устабиленные свободные колебания кварцевого бруска (рис. 1) описываются известными <sup>(6)</sup> уравнениями движения

$$T_{ij,i} + \rho \omega^2 u_j = 0 \quad (1)$$

и граничными условиями

$$T_{ij} n_j = 0, \quad (2)$$

где  $T_{ij}$  — компонента тензора напряжений,  $u_j$  — компонента вектора смещения,  $\rho$  — плотность материала,  $\omega$  — круговая частота,  $n_j$  — компонента внешней единичной нормали. Запятая перед индексом обозначает дифференцирование по данному индексу и суммирование ведется по повторяющемуся индексу. Так как коэффициент электромеханической связи для кварца  $k^2 \ll 1$ , электрические члены в уравнениях (1), (2) опущены.

Поскольку трехмерная граничная задача (1), (2) не разрешима в элементарных функциях, то, вводя разложение

$$u_i = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{x_2}{h}\right)^n \left(\frac{x_3}{H}\right)^m u_i^{(n,m)}, \quad (3)$$

где  $u_i^{(n,m)}$  являются функциями только  $x_1$ ;  $h, H$  — половины размеров бруска в направлении осей  $X_2$  и  $X_3$  соответственно (рис. 1), и используя вариационное уравнение движения <sup>(3)</sup>

$$\int (T_{ij,i} + \rho \omega^2 u_j) \delta u_j dV, \quad (4)$$

где интегрирование ведется по объему бруска  $V$ , после соответствующих преобразований <sup>(5)</sup> вместо уравнений (1), (2) получим систему одномер-

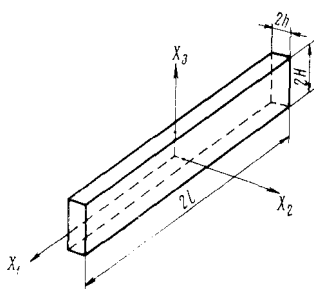


Рис. 1

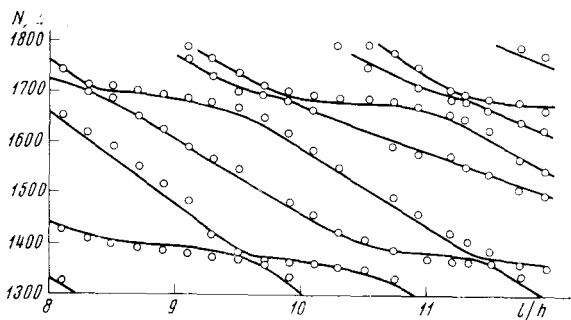


Рис. 2

Рис. 1. Ориентация бруска

Рис. 2. Зависимость частотного коэффициента  $N$  (кг/см) от отношения длины пьезоэлемента к его толщине. Отношение толщины бруска к ширине  $h/H=0,524$ ; срез  $yx1/+35^\circ$

ных приближенных дифференциальных уравнений, описывающих связанные изгибно-сдвиговые колебания в двух взаимно перпендикулярных плоскостях  $X_1OX_2$  и  $X_1OX_3$  (рис. 1)

$$\frac{\partial T_6^{(0,0)}}{\partial x_1} + 4hH\rho\omega^2 u_2^{(0,0)} = 0,$$

$$\frac{\partial T_5^{(0,0)}}{\partial x_1} + 4hH\rho\omega^2 u_3^{(0,0)} = 0,$$

$$\frac{\partial T_1^{(1,0)}}{\partial x_1} - \frac{1}{h} T_6^{(0,0)} + \frac{4}{3} hH\rho\omega^2 u_1^{(1,0)} = 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial T_1^{(0,1)}}{\partial x_1} - \frac{1}{H} T_5^{(0,0)} + \frac{4}{3} hH\rho\omega^2 u_1^{(0,1)} = 0,$$

$$T_6^{(0,0)} = T_5^{(0,0)} = T_1^{(1,0)} = T_1^{(0,1)} = 0 \quad \text{при} \quad x_1 = \mp l, \quad (6)$$

где  $T_i^{(n,m)}$  — компонента матрицы результирующих напряжений.

Для кварцевых брусков с длиной, совпадающей с направлением кристаллофизической оси  $X$  ( $X_1$ ) кварца, имеем

$$\begin{aligned} T_3^{(0,0)} &= 4hH [c_{66}' k_6^2 S_6^{(0,0)} + c_{56}' k_5 k_6 S_5^{(0,0)}], \\ T_5^{(0,0)} &= 4hH [c_{56}' k_5 k_6 S_6^{(0,0)} + c_{55}' k_5^2 S_5^{(0,0)}], \\ T_1^{(1,0)} &= {}_4/3 hH \gamma_{11} S_1^{(1,0)}, \\ T_1^{(0,1)} &= {}_4/3 hH \gamma_{11} S_1^{(0,1)}, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $S_i^{(n,m)}$  — компонента матрицы результирующих деформаций,  $c'_{ij}$  — упругие модули кварца, отнесенные к повернутым осям  $X_1X_2X_3$ ,  $\gamma_{11} = 1/s_{11}$ ,  $s_{11}$  — упругая податливость,  $k_6^2 = \pi^2/12$ ,  $k_5^2$  — нижайший корень уравнения,

$$\gamma_0^2 = 1 + \beta^2 \alpha_{55} \frac{k_5^2}{k_6^2} + \left[ \left( 1 + \beta^2 \alpha_{55} \frac{k_5^2}{k_6^2} \right)^2 - 4\beta^2 \bar{\gamma}_{55} \frac{k_5^2}{k_6^2} \right]^{1/2}, \quad (8)$$

где  $\beta = h/H$ ,  $\bar{\gamma}_{55} = \alpha_{55} - \alpha_{56}^2$ , а  $\gamma_0^2$  — нижайший корень трансцендентного уравнения

$$\begin{vmatrix} (\alpha_{55} g_{11} \lambda_1 + \alpha_{55} k_6 g_{21}) \cos(\lambda_1/\beta) & (\alpha_{55} g_{12} \lambda_2 + \alpha_{56} k_6 g_{22}) \cos(\lambda_2/\beta) \\ g_{21} \lambda_1 \sin(\lambda_1/\beta) & g_{22} \lambda_2 \sin(\lambda_2/\beta) \end{vmatrix} = 0,$$

где

$$g_{1i} = \bar{\gamma}_{55} \lambda_i^2 - \gamma^2 + 3k_6^2, \quad g_{2i} = -3\alpha_{56} k_6 \lambda_i, \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2}^2 &= \{ \bar{\gamma}_{55} \gamma^2 + \alpha_{55} (\gamma^2 - 3k_6^2) + 3\alpha_{56}^2 k_6^2 \pm [ (\bar{\gamma}_{55} \gamma^2 + \alpha_{55} \gamma^2 - 3k_6^2 \alpha_{55} + 3\alpha_{56}^2 k_6^2)^2 - \\ &\quad - 4\alpha_{55} \bar{\gamma}_{55} \gamma^2 (\gamma^2 - 3k_6^2) ]^{1/2} \} / (2\alpha_{55} \bar{\gamma}_{55}), \quad \alpha_{ij} = c_{ij}' / c_{66}'. \end{aligned}$$

Компоненты матрицы результирующих деформаций  $S_i^{(n,m)}$  связаны с компонентами результирующего вектора смещения  $u_i^{(n,m)}$  соотношениями

$$\begin{aligned} S_6^{(0,0)} &= \frac{u_1^{(1,0)}}{h} + \frac{\partial u_2^{(0,0)}}{\partial x_1}, & S_5^{(0,0)} &= \frac{u_1^{(0,0)}}{H} + \frac{\partial u_3^{(0,0)}}{\partial x_1}, \\ S_1^{(1,0)} &= \frac{\partial u_1^{(1,0)}}{\partial x_1}, & S_1^{(0,1)} &= \frac{\partial u_1^{(0,1)}}{\partial x_1}. \end{aligned} \quad (10)$$

Подставляя соотношения (7) в уравнения (5) и (6), получим с учетом соотношений (10)

$$\begin{aligned}
 & c_{66}'k_6^2 \frac{\partial^2 u_2^{(0,0)}}{\partial x_1^2} + \rho\omega^2 u_2^{(0,0)} + \frac{c_{66}'k_6^2}{h} \frac{\partial u_1^{(1,0)}}{\partial x_1} + \\
 & + c_{56}'k_5k_6 \frac{\partial^2 u_3^{(0,0)}}{\partial x_1^2} + \frac{c_{56}'k_5k_6}{H} \frac{\partial u_1^{(0,1)}}{\partial x_1} = 0, \\
 & - \frac{3c_{66}'k_6^2}{h} \frac{\partial u_2^{(0,0)}}{\partial x_1} + \gamma_{11} \frac{\partial^2 u_1^{(1,0)}}{\partial x_1^2} + \left( \rho\omega^2 - \frac{3c_{66}'k_6^2}{h^2} \right) u_1^{(1,0)} - \\
 & - \frac{c_{56}'k_5k_6}{h} \frac{\partial u_3^{(0,0)}}{\partial x_1} - \frac{3c_{56}'k_5k_6}{hH} u_1^{(0,1)} = 0,
 \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned}
 & c_{56}'k_5k_6 \frac{\partial^2 u_2^{(0,0)}}{\partial x_1^2} + \frac{c_{56}'k_5k_6}{h} \frac{\partial u_1^{(1,0)}}{\partial x_1} + c_{55}'k_5^2 \frac{\partial^2 u_3^{(0,0)}}{\partial x_1^2} + \\
 & + \rho\omega^2 u_2^{(0,0)} + \frac{c_{55}'k_5^2}{H} \frac{\partial u_1^{(0,1)}}{\partial x_1} = 0, \\
 & - \frac{3c_{56}'k_5k_6}{H} \frac{\partial u_2^{(0,0)}}{\partial x_1} - \frac{3c_{56}'k_5k_6}{hH} u_1^{(1,0)} - \frac{3c_{55}'k_5^2}{H} \frac{\partial u_3^{(0,0)}}{\partial x_1} + \gamma_{11} \frac{\partial^2 u_1^{(0,1)}}{\partial x_1^2} + \\
 & + \left( \rho\omega^2 - \frac{3c_{55}'k_5^2}{H^2} \right) u_1^{(0,1)} = 0.
 \end{aligned}$$

При  $x_1 = \mp l$

$$\begin{aligned}
 & c_{66}'k_6^2 \left( \frac{u_1^{(1,0)}}{h} + \frac{\partial u_2^{(0,0)}}{\partial x_1} \right) + c_{56}'k_5k_6 \left( \frac{u_1^{(0,1)}}{H} + \frac{\partial u_3^{(0,0)}}{\partial x_1} \right) = 0, \\
 & \frac{\partial u_1^{(1,0)}}{\partial x_1} = 0, \\
 & c_{56}'k_5k_6 \left( \frac{u_1^{(1,0)}}{h} + \frac{\partial u_2^{(0,0)}}{\partial x_1} \right) + c_{55}'k_5^2 \left( \frac{u_1^{(0,1)}}{H} + \frac{\partial u_3^{(0,0)}}{\partial x_1} \right) = 0, \\
 & \frac{\partial u_1^{(1,0)}}{\partial x_1} = 0.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Если в уравнениях (11) и (12) положить коэффициент  $c'_{56}=0$ , то граничная задача (11), (12) распадается на две: одна описывает связанные толщинно-сдвиговые и изгибные колебания <sup>(7)</sup>, другая — связанные колебания сдвига по контуру и колебания изгиба в плоскости длина — ширина бруска <sup>(8)</sup>.

Граничная задача разрешима в аналитическом виде. Однако, для реализации решения этой задачи на ЭВМ БЭСМ-4 оказалось удобнее использовать конечно-разностный метод типа ломаных Эйлера <sup>(9)</sup>. Рассчитанный спектр бруска среза  $uxl/+35^\circ$  показан на рис. 2 сплошными кривыми. На том же рис. 2 точками для сравнения приведены экспериментальные данные. По оси ординат отложены значения частотного коэффициента  $N=2hf$  ( $f$  — частота), рассчитанного на единицу толщины пьезоэлемента, по оси

абсцисс значения отношения длины бруска к его толщине  $l/h$ . Отношение поперечных размеров бруска  $H/h$  служило параметром. Полученные уравнения позволяют рассчитать температурно-частотные характеристики пьезоэлемента с учетом его трехмерности.

Поступило  
18 IV 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> С. П. Тимошенко, Колебания в инженерном деле, «Наука», 1967, стр. 289.  
<sup>2</sup> В. Г. Андросова, П. Г. Поздняков, ДАН, т. 212, № 2, 353 (1973). <sup>3</sup> R. D. Mindlin, E. A. Fox, J. Appl. Mech., v. 27, № 1, 152 (1960). <sup>4</sup> R. D. Mindlin, H. Deresiewicz, J. Appl. Phys., v. 26, № 12, 1435 (1955). <sup>5</sup> R. D. Mindlin, Quart. Appl. Math., v. 19, 51 (1961). <sup>6</sup> J. A. Lewis, Bell Syst. Techn. J., № 5, 1259 (1961). <sup>7</sup> R. D. Mindlin, J. Appl. Phys., v. 22, № 3, 316 (1951). <sup>8</sup> Г. Г. Черных, Электронная техника, сер. 10, Радиокомпоненты, в. 5 (1973). <sup>9</sup> В. И. Арнольд, Обыкновенные дифференциальные уравнения, «Наука», 1972.