

В. В. ЛАРИЧЕВА

**О РАСШИРЕНИИ ИНТЕРВАЛА ПРИМЕНИМОСТИ ОСРЕДНЕНИЯ**

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 12 VII 1974)

Предлагаются постановки и доказательства, развивающие теорию Крылова — Боголюбова — Митропольского <sup>(1)</sup> в аспекте расширения интервала изменения независимой переменной в асимптотических рядах осреднения, дается иное применение неглавных членов рядов осреднения. Схема доказательств выработалась под влиянием аналогичных идей А. А. Дородницына в области асимптотических методов и их математического обоснования <sup>(2-5)</sup>.

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений в векторной стандартной для осреднения форме <sup>(1)</sup>

$$dx/dt = \varepsilon X(t, x), \quad x(0) = x_0; \quad (1)$$

здесь  $\varepsilon > 0$  — малый параметр,  $t \geq 0$  — скаляр,  $n$ -мерный вектор,  $x$  — элемент евклидова пространства  $E_n$ .

В области  $Q \{t \geq 0, x \in D \subset E_n\}$  вектор-функция  $X(t, x)$ :

1) определена и ограничена вместе со своими  $m$  частными производными по  $x$ , и для них имеют место неравенства с положительными константами  $M, \lambda$

$$|X(t, x)| \leq M, \quad |\partial^i X / \partial x^i| \leq \lambda_i \leq \lambda, \quad i = 1, 2, \dots, m; \quad (2)$$

2) периодична по  $t$  (при  $x = \text{const}$ ) с периодом  $T = 2\pi$ .

Введем обозначения для следующих ограниченных в  $Q$ , периодических по  $t$  при  $x = \text{const}$  функций:

$$\bar{X}(t, x) = X(t, x) - X_0(x), \quad X_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X(t, x) \tilde{d}t, \quad (3)$$

$$\tilde{X}(t, x) = \int_0^t \bar{X}(t, x) \tilde{d}t = \tilde{X} - \tilde{X}(0), \quad \tilde{X}(t, x) = \int_0^t X(t, x) \tilde{d}t, \quad (3')$$

где функции  $\bar{X}, \tilde{X}$  имеют нулевое среднее значение;  $\tilde{d}$  — символ интегрирования по  $t$  при  $x = \text{const}$ .

Придадим (1), пользуясь (3), вид эквивалентного интегрального уравнения Вольтерра

$$x - x_0 - \varepsilon \int_0^t X_0(x) dt = \varepsilon \int_0^t \bar{X}(t, x) dt. \quad (4)$$

Лемма 1. Пусть в (2)  $m = 1$ ; тогда полный интеграл по  $t$  в правой части (4) связан с  $\tilde{X}$ -интегралом по  $t$  при  $x = \text{const}$  соотношением

$$\varepsilon \int_0^t \bar{X}(t, x) dt - \varepsilon \tilde{X}(t, x) = -\varepsilon^2 \int_0^t \frac{\partial \tilde{X}}{\partial x} X dt. \quad (5)$$

Дифференцируя (5) по  $t$  и учитывая (3) и (3'), получим тождество, что и доказывает лемму 1. Тогда (4) переписывается как

$$x - x_0 - \varepsilon \int_0^t X_0(x) dt = \varepsilon \bar{X}(t, x) - \varepsilon^2 \int_0^t \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} X dt. \quad (6)$$

Пусть  $m=2$ ; введем аналогичные (3), (3') обозначения для ограниченных, периодических по  $t$  и непрерывно дифференцируемых по  $x$  функций:

$$X_1 = -\frac{\partial \bar{X}}{\partial x} X, \quad \bar{X}_1 = X_1 - X_{1_0}, \quad X_{1_0} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} X_0(x, t) dt, \quad (7)$$

$$\bar{\bar{X}}_1 = \int_0^t \bar{X}_1(t, x) dt, \quad \bar{X} = \bar{\bar{X}}_1 - \bar{\bar{X}}_1(0).$$

Затем во втором члене правой части (6) под знаком интеграла прибавим и вычтем  $X_{1_0}$ , применим лемму 1 к полному интегралу по  $t$  от  $\bar{X}_1(t, x)$ , тогда вместо (6) получим интегральное уравнение Вольтерра с более детальным выделением членов по степеням  $\varepsilon$

$$x - x_0 - \varepsilon \int_0^t X_0(x) dt - \varepsilon^2 \int_0^t X_{1_0}(x) dt = \varepsilon \bar{X}(t, x) + \varepsilon^2 \bar{\bar{X}}_1(t, x) - \varepsilon^3 \int_0^t \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} X dt. \quad (8)$$

По аналогии с получением (4), (6), (8) легко убедиться, что верна Лемма 2. Если в (2)  $m > 2$ , то от (8) можно последовательно перейти к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра вида

$$x - x_0 - \varepsilon \int_0^t f(x, \varepsilon) dt = \varepsilon \tilde{f}(t, x, \varepsilon) + \varepsilon^m f_1(t, x, \varepsilon), \quad (9)$$

где

$$f(x, \varepsilon) = X_0(x) + \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon^i X_{i_0}(x), \quad \tilde{f}(x, t, \varepsilon) = \bar{X}(x, t) + \sum_{i=1}^{m-2} \varepsilon^i \bar{X}_i(x, t), \quad (10)$$

$$f_1(t, x, \varepsilon) = \bar{X}_{m-1}(t, x) - \varepsilon \int_0^t \frac{\partial \bar{X}_{m-1}}{\partial x} X(t, x) dt, \quad (10')$$

$f, f_1, \tilde{f}$  — ограниченные при  $\varepsilon \rightarrow 0$  функции в области  $Q$  до  $t \sim 1/\varepsilon$ , причем (10) периодичны по  $t$  при  $x = \text{const}$  и в виду (2) непрерывно дифференцируемы по  $x$ .

Переход от (1) к (9) — один из способов представления (проинтегрированной по  $t$ ) правой части (1) асимптотическим рядом (из вибраций и плавных членов) по степеням  $\varepsilon$  с остаточным членом  $\sim \varepsilon^m$ . Влияние последнего на решение (9) проясняет

Теорема 1. При условиях (2) в области  $Q$  для  $R = x - \xi$  разности решений (9) и уравнения, получающегося из (9) пренебрежением в правой части членами  $\sim \varepsilon^m$ ,

$$\xi - \xi_0 - \varepsilon \int_0^t f(\xi, \varepsilon) dt = \varepsilon \tilde{f}(\xi, t, \varepsilon), \quad \xi \in D \subset E_n, \quad (11)$$

имеет место оценка

$$|R| \leq \frac{\varepsilon^m \bar{M}}{1 - \varepsilon \bar{\lambda}} \exp \frac{\varepsilon \bar{\lambda} t}{1 - \varepsilon \bar{\lambda}} \sim \varepsilon^m \quad \text{до } t \sim 1/\varepsilon. \quad (12)$$

Доказательство. Вычитая почленно (11) из (9), получим уравнение ошибки

$$R = \varepsilon \int_0^t [f(\xi + R) - f(\xi)] dt + \varepsilon [\tilde{f}(\xi + R) - \tilde{f}(\xi)] + \varepsilon^m f_1(t, x). \quad (13)$$

Свойства функций (10), (10') позволяют указать в области  $Q$  такие константы  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{M}$ , что\*

$$|f_1(t, x)| \leq \bar{M}, \quad |f(\xi + R) - f(\xi)|, \quad |\tilde{f}(\xi + R) - \tilde{f}(\xi)| \leq \lambda |R|. \quad (14)$$

Мажорируя в правой части (13) модуль суммы суммой модулей и пользуясь (14) (такой результат не выйдет из области  $Q$ ), приходим к неравенству

$$|R| \leq \frac{\varepsilon \bar{\lambda}}{1 - \varepsilon \bar{\lambda}} \int_0^t |R| dt + \frac{\varepsilon^m \bar{M}}{1 - \varepsilon \bar{\lambda}}. \quad (15)$$

Решение (15) доказывает справедливость (12)

$$|R| \leq \frac{\varepsilon^m \bar{M}}{1 - \varepsilon \bar{\lambda}} \exp \frac{\varepsilon \bar{\lambda} t}{1 - \varepsilon \bar{\lambda}}. \quad (16)$$

Примечание 1. Не обязательно  $x_0 = \xi_0$ , достаточно  $(x_0 - \xi_0) \sim \varepsilon^m$ , что даст добавку в член  $\sim \varepsilon^m$  в правой части (13). Далее ход рассуждений не изменится.

Примечание 2. Если решение (11) искать в виде ряда по степеням  $\varepsilon$ , например методом малого параметра, беря за первое приближение решение (17), то получим ряд (1) высших приближений с вибрационными улучшениями. Алгоритм (6) позволяет оценить погрешность  $m$ -приближения при  $m \neq \infty$ .

Но далее воспользуемся (11) в других аспектах.

Следствие. Если в (2)  $m=1$ , то верно представление (6), и приближением к нему вида (11) является уравнение

$$\xi = \xi_0 + \varepsilon \int_0^t X_0(\xi) dt, \quad (17)$$

которое совпадает с осредненным уравнением Ван-дер-Поля или первым приближением (1).

Здесь в силу (2), (3'), (10), (10') имеем

$$f = X_0, \quad \tilde{f} = 0, \quad f_1 = \bar{X} - \varepsilon \int_0^t \frac{\partial \bar{X}}{\partial x} X dt, \quad |X_0| \leq M, \quad (18)$$

$$|X_0(x) - X_0(\xi)| \leq \lambda |R|, \quad |f_1| \leq M(1 + \varepsilon \lambda t) \leq M_1 \quad \text{при} \quad t \sim 1/\varepsilon.$$

В итоге вместо (15), (16) будем иметь неравенство

$$|R| \leq \varepsilon \lambda \int_0^t |R| dt + \varepsilon M_1, \quad |R| \leq \varepsilon M_1 \exp \varepsilon \lambda t, \quad (19)$$

что означает  $|R| \sim \varepsilon$  при  $t \sim 1/\varepsilon$ .

Последняя оценка аналогична (5), однако согласно теореме 1 эта оценка останется  $\sim \varepsilon$  не только при  $x_0 = \xi_0$ , но и при  $|x_0 - \xi_0| \sim \varepsilon$ . Это видно и из первого неравенства (19).

Добавлением к (5) является также оценка (без экспоненциального множителя) вида  $|R| = k_1 \varepsilon$ , где  $k_1 > M$ , подставляя которую в первое неравенство (19), убеждаемся в справедливости этой оценки до  $t \geq (k_1 - M) / [\varepsilon \lambda (1 + k_1)]$ .

Автор пользуется случаем поблагодарить акад. А. А. Дородницына за замечания в моей статье (5), способствовавшие рассмотрению случая  $\xi_0 \neq x_0$ .

\* Здесь  $\bar{\lambda}$ ,  $\bar{M}$ , в общем, отличны от  $\lambda$ ,  $M$ , фигурирующих в (2). Это проявление косвенной зависимости оценки (12) от числа  $m$ .

и получению оценки без экспоненциального сомножителя. По геометрическому смыслу решение (17) дает некоторую среднюю (бесколебательную) линию точного решения (6) и отличается от последнего сначала (при  $t \sim 1$ ) на вибрации порядка  $\varepsilon X$ , далее накапливается систематическая погрешность  $\sim \varepsilon$  при  $t \sim 1/\varepsilon$  (см. (5, 6)).

**Определение.** Аннулируя в правой части (11) вибрационные члены с нулевым средним значением, т. е. полагая  $\tilde{f}(\xi, t, \varepsilon) = \tilde{f}(0)$ , введем переменную  $\eta$ , удовлетворяющую уравнению, похожему на (17), стационарному (без вибраций),

$$\eta = \eta_0 + \varepsilon \int_0^t f(\eta, \varepsilon) dt, \quad \eta_0 = \xi_0 + \varepsilon \tilde{f}(0). \quad (20)$$

По отношению к решению (11) переменную  $\eta$  можно назвать средней линией — этим понятием обобщается геометрическая интерпретация решения первого приближения (17). Решение уравнения (20) легко находится в виде ряда по степеням  $\varepsilon$  методом малого параметра. Получится процесс, аналогичный построению высших приближений (1), но стационарный, его погрешность в каждом приближении оценивается аналогично теоремам 1, 2.

Очевидно, разность решений (20) и (11) или (9) остается  $\sim \varepsilon$  до  $t \sim 1/\varepsilon$ , но и на более широком интервале, как показывает

**Теорема 2.** Пусть для (9) функция (10)  $f = \varepsilon^{m-1} X_{(m-1)\varepsilon}(x)$ , тогда при условиях теоремы 1 для разности решений (9) и (11) будем иметь не только оценку (12), но и  $|R| \sim \varepsilon$  на интервалах  $t \sim 1/\varepsilon^m$ , и на этом же интервале  $|R_1| \sim \varepsilon$ , где  $R_1 = \xi - \eta$  — разность решений (11) и (20).

**Доказательство.** Очевидно, в приближении (11) также будет  $f \sim \varepsilon^{m-1}$  и в (13) коэффициент при интегральном члене  $\sim \varepsilon^m$ , два других члена  $\sim \varepsilon$  при  $t \sim 1/\varepsilon^m$ . Рассуждая аналогично (14)–(16), найдем, что  $|R| \sim \varepsilon$  при  $t \sim 1/\varepsilon^m$ , то же относится к  $R_1$ , так как уравнение для  $R_1$  получается из (13) отбрасыванием двух последних членов, а они оба  $\sim \varepsilon$  при  $t \sim 1/\varepsilon^m$ .

**Примечание.** Если в (9), (10)  $X_0 = \dots = X_p = 0$ , где  $p < m-2$ , то  $|R| \sim \varepsilon$  на интервале  $t \sim 1/\varepsilon^{2+p}$ .

Если в (8)  $X_0 = 0$ , то  $|R| \sim \varepsilon$  до  $t \sim 1/\varepsilon^2$ . Напомним, что для теории осреднения случай  $X_0 = 0$  является основным, когда становится необходимым учет неглавных членов как  $X_1$ ,  $\varepsilon X$  и уточнение порядка погрешности осреднения. Теорема 2 дает другую трактовку этой ситуации: эффект неглавных членов (при отсутствии главных) проявляется с точностью до  $\sim \varepsilon$  на интервалах  $t \sim 1/\varepsilon^2$ . Отметим случай, когда для главных членов в (13) при увеличении  $t$  до  $\sim 1/\varepsilon^p$ , где  $m \geq p > 1$ , выполняется

$$\int_0^t [f(x) - f(\xi)] dt \sim 1, \quad (21)$$

то можно показать, что  $|R| \sim \varepsilon$  до  $t \sim 1/\varepsilon^p$ .

Условие (21) может удовлетворяться, например, за счет убывания правой части (1) по медленным переменным  $x$  или  $\tau = \varepsilon t$ .

Автор благодарит акад. АН УССР Ю. А. Митропольского и чл.-корр. АН СССР Д. Е. Охочимского за полезные обсуждения вопросов осреднения на семинарах.

Центральный аэрогидродинамический институт  
им. Н. Е. Жуковского

Поступило  
25 VI 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский, Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний, М., 1963. <sup>2</sup> А. А. Дородницын, ПММ, т. 11, № 3, 313 (1947). <sup>3</sup> А. А. Дородницын, УМН т. 7, № 6, (52), 3 (1952). <sup>4</sup> А. И. Курьянов, В. В. Ларичева, Сб.: Проблемы прикладной математики и механики, «Наука», 1974, стр. 86, <sup>5</sup> В. В. Ларичева, ДАН, т. 165, № 2, 239 (1965). <sup>6</sup> В. В. Ларичева, ДАН, т. 188, № 6, 1237 (1969).