Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 4

УДК 513.88 МАТЕМАТИКА

В. П. ОДИНЕЦ

О ЕДИНСТВЕННОСТИ МИНИМАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИЙ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 17 VII 1974)

1. Пусть D — линейное дополняемое подпространство * банахова пространства B над полем R вещественных чисел. Пусть P — проекция (т. е. идемпотентный линейный ограниченный оператор) из B на D. Если для любой другой проекции P_1: $B\to D$ справедливо $\|P_1\|\geqslant\|P\|$, то говорят, что проекция P минимальная. Настоящая заметка посвящена вопросу единственности минимальных проекций, главным образом, с неединичной нормой. (О единственности проекций с нормой, равной 1, см. ([2, 8, 12]).)

Вопросы существования минимальных проекций с произвольной нормой изучались ранее ([3–5]). В частности, было установлено ([4]), что если D — рефлексивное (например, равномерно выпуклое) дополняемое подпространство линейного нормированного пространства X, то существует минимальная проекция из X на D.

Что касается вопроса единственности минимальных проекций с неединичной нормой (без каких-либо дополнительных ограничений на проекцию), то до настоящего времени была установлена единственность лишь для проекции Фурье и ее аналогов (см. ([6, 7]), а также ([8, 9])).

2. Пусть D — подпространство в B. Если существует минимальная проекция P из B на D и $\|P\|=p\geqslant1$, то подпространство D будем называть p-правильным (если $p=1$, то просто правильным). Обозначим через $\mathfrak{U}^{p(B,D)}(B, D)$, или кратко $\mathfrak{U}^p(B, D)$, множество всех минимальных проекций из B на D. Если при этом множество $\mathfrak{U}^p(B, D)$ состоит лишь из одного элемента, то будем говорить, что пара (B, D) обладает свойством (γ_p), или единственности. Пусть $S=\{x\in B: \|x\|=1\}$, θ — нулевой элемент в B, $U(\theta, p)=\{x\in B: \|x\|\leqslant p\}$. Для произвольных подпространств X и Y из B будем обозначать через $(X,\hat{Y})=\inf\limits_{x\in X\setminus[\theta],\, y\in Y}\|x+y\|/\|x\|$ наклон ([10]) подпространства X к Y.

Теорема 2.1. *Пусть D—p-правильное, $p>1$, равномерно выпуклое подпространство банахова пространства B.*

Тогда для любых двух проекций P_1 и $P_2\in\mathfrak{A}^p(B, D)$ справедливо

$$(P_1^{-1}(\theta)\hat{,}\,P_2^{-1}(\theta))=0. \tag{1}$$

Предположим противное, т. е. пусть существуют P_1, $P_2\in\mathfrak{U}^p(B, D)$ такие, что $(P_1^{-1}(\theta)\hat{,}\,P_2^{-1}(\theta))>0$. Рассмотрим проекцию $P_3={}^1/_2(P_1+P_2)$. В силу p-правильности D существует последовательность $\{z_k\}\subset S$: $\lim\limits_{k\to\infty}\|P(z_k)\|=p$. В силу равномерной выпуклости D можно показать, что $\|P_1(z_k)-P_2(z_k)\|\underset{k\to\infty}{\to}0$. С другой стороны, так как не выполняется условие (1), то $\|P_1(z_k)-P_2(z_k)\|>t_0>0$ при всех достаточно больших k.

Следствие 2.1. *Пусть D—p-правильное, $p>1$, равномерно выпуклое подпространство банахова пространства B такое, что* $\operatorname{codim} D=1$.

* Подпространства везде предполагаются замкнутыми. Термины, а также обозначения классических пространств l_p^n, l_p, $1\leqslant p<\infty$, $n\geqslant2$, c_0, встречающиеся в работе, следуют книге ([1]).

Тогда пара (B, D) обладает свойством (γ_p).

Для доказательства заметим, что по условию следствия для любой проекции P: $B\to D$ справедливо $\dim P^{-1}(\theta)=1$. Поэтому условие (1) означает, что $P_1^{-1}(\theta)=P_2^{-1}(\theta)$ ((1^0), теорема 12), т. е. что $P_1=P_2$.

Пример 2.1. Пусть M — подпространство в l_p, $1<p\neq 2<\infty$, изометрически не изоморфное l_p и такое, что $\operatorname{codim} M=1$. Тогда M не будет правильным в l_p подпространством ([11]). Учитывая равномерную выпуклость пространства l_p, в силу следствия 2.1 заключаем, что пара (l_p, M) обладает свойством (γ_{p_1}), где $p_1>1$. (Можно показать, что $p_1\leqslant 2$.)

Замечание 2.1. Нетрудно построить примеры, показывающие, что при $p=1$ утверждение следствия 2.1 (как, впрочем, и теоремы 2.1) не выполняется. Отметим также, что при $p>1$, $\operatorname{codim} D=1$, пара (B, D) может обладать свойством (γ_p) и при этом D не будет равномерно выпуклым. Например, рассмотрим в пространстве $c^{(3)}$ — пространстве троек чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, где $\alpha_i\in R$, $i=1, 2, 3$, с естественно определенными векторными операциями и нормой $\|(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 3}|\alpha_i|$ подпространство D, натянутое на элементы $x_1=(1;\ 1;\ 0)$ и $x_2=(0;\ 1;\ 1)$. Легко показать, что пара $(c^{(3)}, D)$ обладает свойством (γ_p), где $p={}^4/_3$, хотя D не строго нормировано (или, что в конечномерном случае эквивалентно, не равномерно выпукло).

3. Пусть X и Y — подпространства в B. Если $B=X+Y$, $X\cap Y=[\theta]$, то будем писать $B=X\oplus Y$. Если при этом для любых $x\in X$, $y\in Y$ справедливо либо $\|x+y\|^p=\|x\|^p+\|y\|^p$, $1\leqslant p<\infty$, либо $\|x+y\|=\max\{\|x\|, \|y\|\}$, то будем писать соответственно $B=X\overset{l_p}{\oplus}Y$, и $B=X\overset{c_0}{\oplus}Y$.

Через B^* обозначим множество всех линейных непрерывных функционалов на B. Пусть $S_{B^*}=\{y\in B^*\colon \|y\|=1\}$. Если элемент $x\in B\setminus[\theta]$, то $A(x)=\{f\in S_{B^*}\colon f(x)=\|x\|\}$. Через J_x будем обозначать подпространство гладкости в точке x, т. е. $J_x=\{y\in B$: существует $g(x, y)=\lim\limits_{t\to 0} t^{-1}(\|x+ty\|-\|x\|)\}$.

Для произвольной последовательности элементов $\{x_i\}$ из B будем обозначать через $[x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots]$ наименьшее подпространство, содержащее $\{x_i\}$. Легко проверяется следующее

Предложение 3.1. *Пусть D и K — подпространства банахова пространства B, $D\subset K\subset B$. Пусть K — правильное подпространство в B. Тогда:*

1^0) *Если D — p-правильное, $p\geqslant 1$, в B, то D — p-правильное и в K. При этом, если $P\in\mathfrak{U}^p(B, D)$, то $P|_K\in\mathfrak{U}^p(K, D)$.*

2^0) *Если D — p-правильное, $p\geqslant 1$, в K, то D — p-правильное и в B. При этом, если $P\in\mathfrak{U}^p(K, D)$, $P_1\in\mathfrak{U}^1(B, K)$, то $P_2=PP_1\in\mathfrak{U}^p(B, D)$.*

3^0) *Если пара (B, D) обладает свойством (γ_p), $p\geqslant 1$, то и пара (K, D) обладает свойством (γ_p).*

4^0) *Если пара (K, D) обладает свойством (γ_p), $p\geqslant 1$, а пара (B, K) не обладает свойством (γ_1) и при этом хотя бы две проекции P_1, $P_2\in\mathfrak{U}^1(B, K)$, $P_1\neq P_2$ таковы, что $P_2^{-1}(\theta)\not\subset P^{-1}(\theta)\oplus P_1^{-1}(\theta)$, где $P\in\mathfrak{U}^p(K, D)$, то пара (B, D) не обладает свойством (γ_p).*

Следствие 3.1. *Пусть банахово пространство $B=K\overset{l_1}{\oplus}M$, $M\neq[\theta]$. Пусть D — дополняемое подпространство в K такое, что пара (K, D) обладает свойством (γ_p), где $p\geqslant 1$.*

Тогда подпространство D будет p-правильным в B, но пара (B, D) не обладает свойством (γ_p).

Следствие 3.2. *Пусть D — p-правильное, $p>1$, равномерно выпуклое подпространство сепарабельного банахова пространства B такое, что* $\operatorname{codim} D=n$, $n\geqslant 1$.

Тогда существует подпространство K: $D\subset K\subseteq B$, $\operatorname{codim} D|_K=1$, *и пара (K, D) обладает свойством (γ_p).*

Справедливость этого следствия вытекает из предложения 1 работы [13], а также из предложения 3.1 и следствия 2.1.

Пример 3.1. Пусть $B=l_p{}^3\overset{l_1}{\oplus}X$, где $2\neq p>1$, а X — произвольное банахово пространство. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^3$ — канонический базис в $l_p{}^3$. Пусть $D=[e_1+e_2, e_2+e_3]$. Тогда D будет p_1-правильным в B, где $1<p_1$ [14]. При этом в силу следствий 2.1 и 3.1 пара $(l_p{}^3, D)$ будет, а пара (B, D) не будет обладать свойством (γ_{p_1}).

В связи с примером 3.1 заметим, что если D — p-правильное подпространство произвольного банахова пространства и $2<\dim D<\infty$, то, в силу неравенства (5) из [15],

$$1\leqslant p\leqslant(\dim D)^{1/2}, \tag{3}$$

а при $\dim D=2$, в силу известного неравенства Асплунда, $1\leqslant p\leqslant {}^4/_3$. Значит, в примере 3.1 $p_1\leqslant{}^4/_3$.

Пусть P — проекция из B на подпространство D. Обозначим через $\operatorname{crit} P=\{z\in S\colon \|P(z)\|=\|P\|\}$.

Теорема 3.1. *Пусть D и K — соответственно p-правильное, $p\geqslant1$, и правильное подпространства банахова пространства B, $D\subset K\subset B$. Пусть пара (K, D) обладает свойством (γ_p). Пара (B, D) обладает свойством (γ_p), если проекция $P\in\mathfrak{U}^p(K, D)$ такова, что существуют $T\subseteq\operatorname{crit} P$, $T\neq\phi$, и $M\subseteq\bigcup\limits_{y\in P(T)}(A(y)|_D)$,*

1^{00}) *M тотально на D.*

2^{00}) *Для любого $f\in M$ функционал вида fP имеет единственное расширение на B, сохраняющее норму.*

Отметим, что для выполнения условия 2^{00}) достаточно [16], чтобы для каждого $z\in T$ выполнялось

$$K+J_z=B. \tag{4}$$

Пример 3.2. Пусть $B_1=Y\overset{l_p}{\oplus}X$, $B_2=Y\overset{c_0}{\oplus}X$, где $2\neq p>1$, X — произвольное банахово пространство, а Y — либо $l_{p_3}{}^3$, $p_3>1$, либо $c^{(3)}$. Пусть D — подпространство в Y, определенное в примере 3.1 (соответственно в замечании 2.1). Тогда для подпространств D и Y, как можно проверить, выполнены условия теоремы 3.1 и, значит, пара (B_i, D), $i=1, 2$, обладает свойством (γ_{p_i}), где p_1 — то же, что и в примере 3.1, а $p_2={}^4/_3$. В частности, если $\{e_i\}_{i=1}^\infty$ — канонический базис в l_p (соответственно в c_0) и $l_p{}^3$ ($c^{(3)}$) отождествлено с $[e_1, e_2, e_3]$, D — с $[e_1+e_2, e_2+e_3]$, а X — с $[e_4, e_5, e_6, \ldots]$, то пара (l_p, D) (соответственно c_0, D) обладает свойством (γ_{p_1}) (соответственно $(\gamma_{4/3})$).

Отметим, кстати, что в качестве M из примера 2.1 можно было взять $M_1=D\overset{l_p}{\oplus}[e_4, e_5, e_6, \ldots]$, где $D=[e_1+e_2, e_2+e_3]$.

Автор благодарит М. И. Кадеца и В. Н. Судакова за внимание к работе.

Ленинградский финансово-экономический институт
им. Н. А. Вознесенского

Поступило
13 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. М. Дэй,* Нормированные линейные пространства, М., 1961. [2] *В. П. Одинец,* Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 1 (1974). [3] *С. М. Лозинский,* ДАН, т. 61, № 2, 194 (1948). [4] *J. R. Isbell, Z. Semadeni,* Trans. Am. Math. Soc., v. 107, № 1, 40 (1963). [5] *J. Blatter, E. W. Cheney,* J. Appr. Theory, v. 6, № 1, 74 (1972). [6] *E. W. Cheney, C. R. Hobby et al.,* Bull. Am. Math. Soc. v. 75, № 1, 51 (1969). [7] *P. V. Lambert,* Bull. Math. Soc. Belg., v. 21, № 4, 359 (1969). [8] *E. W. Cheney, K. H. Price,* In: Approximation Theory, N. Y., 1970, p. 271. [9] *М. И. Кадец, Б. С. Митягин,* УМН, т. 26, № 6, 85 (1973). [10] *В. И. Гурарий,* Теория функций, функциональн. анализ и их прилож. № 1, 196 (1965). [11] *A. Pelczyński,* Stud. Math., v. 19, № 2, 214 (1960). [12] *В. П. Одинец,* Изв. высш. учебн. завед., Математика, № 4, 83 (1973). [13] *J. Lindenstrauss,* Bull. Am. Math. Soc., v. 72, 970 (1966). [14] *F. J. Murray,* Trans. Am Math. Soc., v. 41, № 1, 150 (1937). [15] *М. И. Кадец, М. Г. Снобар,* Матем. заметки, т. 10, № 4, 454 (1971). [16] *E. T. Poulsen,* Math. Ann., v. 162, 226 (1966).