Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 4

МАТЕМАТИКА

А. А. ПАНКОВ

ОПУСЫ И БАНАХОВЫ РАССЛОЕНИЯ

(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 24 VII 1974)

Пусть X — некоторое топологическое пространство (в дальнейшем все топологические пространства предполагаются хаусдорфовыми). Банаховым расслоением над X будем называть локально-тривиальное расслоенное пространство $\mathscr{E}\to X$, слоем которого служит банахово пространство E над $\mathbf{R}$ или $\mathbf{C}$, а структурной группой — группа $GL(E)$ автоморфизмов E, причем функции перехода ([1])

$$g_{UV}\colon\ (U\cap V)\times E\to(U\cap V)\times E$$

имеют вид

$$g_{UV}\colon\ (x,\ s)\mapsto(x,\ \tilde{g}_{UV}(x)s),$$

где $\tilde{g}_{UV}\colon U\cap V\to GL(E)$ — непрерывное отображение. (Группа $GL(E)$ снабжается равномерной операторной топологией.)

Отображением банахова расслоения $\mathscr{E}_1$ в банахово расслоение $\mathscr{E}_2$ (с одной и той же базой X) будем называть послойно линейное отображение f: $\mathscr{E}_1\to\mathscr{E}_2$, которое в локальных картах задается непрерывной функцией со значениями в $L(E_1,\ E_2)$. (E_1 и E_2 — слои $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ соответственно, $L(E_1,\ E_2)$ — банахово пространство всех линейных непрерывных операторов, действующих из E_1 в E_2.) Такое отображение будем называть послойно расщепляющим, если для любого $x\in X$ индуцированное отображение слоев f_x: $\mathscr{E}_{1x}\to\mathscr{E}_{2x}$ является расщепляющим. (Это означает, что образ $\operatorname{im} f_x$ — замкнутое и дополняемое подпространство в $\mathscr{E}_{2x}$, а ядро $\ker f_x$ — дополняемое подпространство в $\mathscr{E}_{1x}$).

Пусть E — банахово пространство. Обозначим $m(E)$ банахово пространство всех последовательностей $\xi=\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\xi_i\in E$, для которых конечна норма

$$\|\xi\|_m=\sup_{1\leqslant i<\infty}\|\xi_i\|.$$

Если $\mathscr{E}$ — банахово расслоение с компактной базой X, то имеет место изоморфизм расслоений ([2])

$$\mathscr{E}\oplus m(E)\simeq m(E).$$

Для краткости через E мы обозначаем также тривиальное расслоение со слоем E; в нашем случае E — слой $\mathscr{E}$.

Рассмотрим теперь категорию $\mathscr{B}$, объектами которой являются банаховы расслоения с компактными базами (для объектов категории $\mathscr{B}$ будем использовать обозначения вида $(X,\mathscr{E})$). Морфизмами этой категории служат пары $f=(\varphi,\ \psi)\colon\ (X,\mathscr{E})\to(Y,\ \mathscr{F})$, где φ: $X\to Y$ — непрерывное отображение баз, а ψ: $\varphi^*\mathscr{F}\to\mathscr{E}$ — отображение банаховых расслоений с общей базой ($\varphi^*\mathscr{F}$ — обратный образ расслоения $\mathscr{F}$ при отображении φ). Композиция морфизмов определяется равенством

$$(\varphi_1,\ \psi_1)\circ(\varphi_2,\ \psi_2)=(\varphi_1\circ\varphi_2,\ \psi_2\circ\varphi_2^*(\psi_1)).$$

Любой морфизм категории $\mathscr{B}$ представим в виде $(\varphi,\ \psi)=\bar{\varphi}\circ\bar{\psi}$, где $\bar{\varphi}=(\varphi,\ \mathrm{id})$, $\bar{\psi}=(\mathrm{id},\ \psi)$.

Поставим в соответствие каждому объекту $(X,\ \mathscr{E})$ банахово пространство $\Gamma(\mathscr{E})$ сечений расслоения $\mathscr{E}$. Это соответствие определяет контравариантный функтор из категории $\mathscr{B}$ в категорию банаховых пространств. В соответствии с дополнением 1 к книге ([3]) дадим

Определение. Пусть f: $(X, \mathscr{E}) \to (Y, \mathscr{F})$ — морфизм категории $\mathscr{B}$. Непрерывный линейный оператор u: $\Gamma(\mathscr{E}) \to \Gamma(\mathscr{F})$ называется линейным опусом для f, если

$$\Gamma(f) \circ u \circ \Gamma(f) = \Gamma(f).$$

Оператор u будем называть линейным оператором продолжения (осреднения), если

$$\Gamma(f) \circ u = \mathrm{id}_{\Gamma(\mathscr{E})} \quad (u \circ \Gamma(f) = \mathrm{id}_{\Gamma(\mathscr{F})}).$$

Замечание. Опусы, рассмотренные в ([3]), включаются в нашу схему. Это опусы для морфизмов вида $\overline{\varphi}$ тривиальных одномерных расслоений.

1. Случай постоянной базы. Пусть задан морфизм

$$\underline{\psi} = (\mathrm{id}, \psi) : (X, \mathscr{E}) \to (X, \mathscr{F}).$$

Для каждого $x \in X$ положим (ср. ([4]))

$$k(\psi_x) = \sup_{\xi \in \mathrm{Im}\,\psi_x,\ \|\xi\|=1} \ \inf_{\psi_x \zeta = \xi} \|\zeta\|.$$

Мы считаем здесь, что нормы в слоях расслоений $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ выбраны непрерывно зависящими от $x \in X$. Это всегда можно сделать с помощью разбиения единицы. Положим

$$k(\psi) = \sup_{x \in X} k(\psi_x).$$

Имеет место

Теорема 1. *Пусть* ψ: $\mathscr{F} \to \mathscr{E}$ — *послойно расщепляющее отображение. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) ψ *допускает линейный опус*;

2) $\overline{k}(\psi) < \infty$.

В случае, когда расслоения $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ тривиальны, утверждение теоремы 1 является простой переформулировкой основного результата ([5]). В общем случае из изоморфизма (1) следуют изоморфизмы

$$\mathscr{E} \oplus m(E \oplus F) \simeq m(E \oplus F) \simeq \mathscr{F} \oplus m(E \oplus F), \tag{2}$$

где E и F — слои расслоений $\mathscr{E}$ и $\mathscr{F}$ соответственно. Изоморфизмы (2) позволяют свести доказательство к случаю тривиальных расслоений.

2. Замена базы. Рассмотрим теперь морфизмы вида

$$\overline{\varphi} = (\varphi, \mathrm{id}) : (X, \varphi^* \mathscr{E}) \to (Y, \mathscr{E}).$$

В этом случае имеет место следующая теорема, обобщающая предложение 2.8 ([3]).

Теорема 2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *отображение* φ: $X \to Y$ *допускает линейный опус* (*соответственно оператор продолжения, осреднения*);

2) *для некоторого* $\mathscr{E}$ *морфизм вида* $\overline{\varphi} = (\varphi, \mathrm{id})$ *допускает линейный опус* (*соответственно оператор продолжения, осреднения*);

3) *для любого* $\mathscr{E}$ *морфизм вида* $\overline{\varphi} = (\varphi, \mathrm{id})$ *допускает линейный опус* (*соответственно оператор продолжения, осреднения*).

Доказательство импликации 1) $\Rightarrow$ 3) основано на предложении 2.8 работы ([3]) и изоморфизма (1). Импликация 3) $\Rightarrow$ 2) очевидна. Доказательство последней импликации 2) $\Rightarrow$ 1) использует тот факт ([6]), что в любом бесконечномерном банаховом расслоении с компактной базой существует тривиальное одномерное подрасслоение.

3. Из теорем 1, 2 и представления $(\varphi, \psi) = \overline{\varphi} \circ \underline{\psi}$ вытекают следующие утверждения.

Предложение 1. *Пусть* ψ: $\varphi^*\mathscr{F}\to\mathscr{E}$ — *послойно расщепляющий мономорфизм. Если* φ: $X\to Y$ *допускает линейный опус (оператор осреднения), то морфизм* (φ, ψ) *допускает линейный опус (оператор осреднения).*

Предложение 2. *Пусть* φ: $X\to Y$ *допускает линейный оператор продолжения. Если* ψ: $\varphi^*\mathscr{F}\to\mathscr{E}$ — *послойно расщепляющее отображение и* $k(\psi)<\infty$, *то морфизм* (φ, ψ) *допускает линейный опус. Если при этом* ψ — *эпиморфизм, то* (φ, ψ) *допускает линейный оператор продолжения.*

Замечание. Если ψ — эпиморфизм, то автоматически $k(\psi)<\infty$ (см. [4]).

4. Пусть $Z\to Y$ — локально-тривиальное компактное расслоенное пространство со слоем T. Группа $\mathrm{Aut}(T)$ гомеоморфизмов T действует на пространстве $C(T)$ непрерывных функций левыми сдвигами: $(g\circ f)(t)=f(g^{-1}t)$. Таким образом, с расслоением $Z\to Y$ естественным образом ассоциируется банахово расслоение $\mathscr{F}\to Y$ со слоем $C(T)$. Функциями перехода этого расслоения служат функции перехода g_{ij} расслоения $Z\to Y$. Заметим, что $\Gamma(\mathscr{F})$ канонически изоморфно пространству $C(Z)$.

Пусть теперь задано отображение компактных расслоенных пространств

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{\sigma} & Z \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \xrightarrow{\varphi} & Y \end{array}$$

Обозначим через $\mathscr{E}$ банахово расслоение со слоем $C(S)$ (S — слой W), ассоциированное с расслоением W. Отображение (φ, σ) индуцирует морфизм (φ, σ°): $(X, \mathscr{E})\to(Y, \mathscr{F})$ категории $\mathscr{B}$.* При этом морфизм (φ, σ°) допускает опус тогда и только тогда, когда σ допускает опус (в смысле [3]).

Теперь предложения 1 и 2 дают следующее утверждение.

Теорема 3. 1) *Пусть* φ: $X\to Y$ *допускает линейный опус (оператор осреднения) и пусть для любого* $x\in X$ *отображение* σ_x: $W_x\to Z_{\varphi(x)}$ *допускает линейный оператор осреднения. Тогда* σ: $W\to Z$ *допускает линейный опус (оператор осреднения).*

2) *Пусть* φ *допускает линейный оператор продолжения,* σ_x *допускает линейный опус для всех* $x\in X$ *и* $k(\sigma^\circ)<\infty$. *Тогда* σ *допускает линейный опус. Если же для всех* $x\in X$ *отображение* σ_x *допускает линейный оператор продолжения, то и* σ *допускает линейный оператор продолжения.*

5. В качестве еще одного приложения результатов п. 2 обсудим вопрос о принадлежности пространства $C(Z)$ (Z — компактное расслоенное пространство с базой Y и слоем T) к классам $\mathscr{P}_\lambda$.**

Обозначим через $\mathscr{F}$ банахово расслоение с базой Y и слоем $C(T)$, ассоциированное с расслоением Z (см. п. 3). Имеет место изоморфизм $\Gamma(\mathscr{F})\simeq C(Z)$. Более того, нетрудно показать, что этот изоморфизм является изометрическим при естественном выборе нормы в $\Gamma(\mathscr{F})$. Пусть φ_Y: $C_Y\to Y$ — эпиморфизм Глисона (см. [7]), т. е. неприводимый эпиморфизм экстремально несвязного [8] компакта G_Y на Y. Тогда существуют такие тривиальное банахово расслоение $\mathscr{E}_Z=G_Y\times C(S)$, где S экстремально несвязно, и морфизм f_Z: $(G_Y, \mathscr{E}_Z)\to(Y, \mathscr{F})$ категории $\mathscr{B}$ вида $f_Z=(\varphi_Y, \psi)$, что $\Gamma(f_Z)$: $\Gamma(\mathscr{F})\to\Gamma(\mathscr{E}_Z)$ — изометрический мономорфизм и $\Gamma(\mathscr{F})=C(Z)$ принадлежит классу $\mathscr{P}_\lambda$ тогда и только тогда, когда f_Z допускает линейный оператор осреднения нормы $\leqslant\lambda$. (Роль морфизма f_Z аналогична роли эпиморфизма Глисона [3]. Конструкцию морфизма f_Z мы опускаем. Отметим только, что она основана на стабильной тривиальности банаховых расслоений. На самом деле пространство S имеет вид $G_T\times\Delta$, где Δ — конечное множество.)

---

* σ^0 действует по формуле σ^0: $h(t)\to h(\sigma_x t)$, где $t\in(\varphi^*Z)_x\simeq T$ и $h\in(\varphi^*\mathscr{F})_x\simeq C(T)$.

** Напомним (см., например [3]), что банахово пространство E принадлежит $\mathscr{P}_\lambda$ ($\mathscr{P}'_\lambda$), если для любого (сепарабельного) банахова пространства F и для любого изометрического вложения u: $E\to F$ существует проектор в F на uE нормы $\leqslant\lambda$.

Справедлива следующая

Теорема 4. *Если* $C(Y)\in\mathcal{P}_\lambda$ *и* $C(T)\in\mathcal{P}_\mu$, *то* $C(Z)\in\mathcal{P}_{\lambda\mu}$.

Рассмотрим теперь вопрос о принадлежности $C(Z)$ классам $\mathcal{P}_\lambda'$. Пусть $C(Y)\in\mathcal{P}_\lambda'$ и $C(T)\in\mathcal{P}_\mu'$. Имеем изоморфизм ([3]) $C(Y)\simeq C(T)\simeq C$. Кроме того, $c\simeq c_0$ ([10]) (c (c_0) — пространство всех сходящихся (к нулю) последовательностей). Поскольку $Gl(c_0)$ стягиваема ([11]), то расслоение $\mathcal{F}$ тривиально. Следовательно, $C(Z)\simeq\Gamma(\mathcal{F})\simeq c(c)$ ($c(E)$ — пространство всех сходящихся последовательностей элементов из E). Нетрудно заметить, что $c(c)\simeq c$. Тогда ([9]) $C(Z)\in\mathcal{P}_\nu'$ для некоторого ν.

Белгородский технологический
институт строительных материалов

Поступило
10 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Д. Хьюзмоллер,* Расслоенные пространства, М., 1970. [2] *П. А. Кучмент,* Канд. дисс. Воронеж, 1972. [3] *А. Пелчинский,* Линейные продолжения, линейные усреднения и их применения, М., 1970. [4] *А. С. Маркус,* Уч. зап. Кишиневск. гос. унив. т. 39, 265 (1959). [5] *Ю. Лайтерер,* Матем. исследования, т. 5, 4, Кишинев, 1970, стр. 115. [6] *П. А. Кучмент,* Тр. н.-и. инст. математики, Воронежск. гос. унив. в. 5, 80 (1972). [7] *A. M. Gleason,* Illinois J. Math., v. 2, 482 (1958). [8] *Дж. Келли,* Общая топология, М., 1968. [9] *D. Amir,* Proc. Am. Math. Soc., v. 15, 396 (1964). [10] *S. Banach,* Theorie desoperations linéaires, Warszawa, 1932. [11] *G. Neubauer,* Math. Ann., v. 174, 33 (1967).