

Г. И. ПЕТРУНИН, Р. П. ЮРЧАК

О ФОНОННОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В МАНТИИ ЗЕМЛИ

(Представлено академиком В. В. Шулейкиным 23 V 1974)

Изменение теплопроводности с глубиной представляет существенный интерес в связи с изучением термической истории планеты, распределения температуры в земном шаре и др. Решение указанных вопросов имеет важное значение для прикладной геологии, для использования энергетических ресурсов Земли. За последнее время в данном направлении сделаны существенные сдвиги (¹⁻⁵). Согласно существующим работам, в частности Е. А. Любимовой, теплопроводность вещества Земли обусловлена следующими основными механизмами переноса тепловой энергии: фононным, фотонным, экситонным и электронным. В работах (¹⁻⁵) проведены оценки всех составляющих, основанные на соответствующих теоретических расчетах для гипотетического вещества без учета его термодинамического состояния. Лишь В. Н. Жарков при расчетах фононной составляющей теплопроводности учел влияние давления и температуры (³); согласно этим расчетам и получен профиль изменения $\lambda_{\text{ф}}$ с глубиной.

Однако, на наш взгляд, в настоящее время, когда появился ряд экспериментальных данных о температурной зависимости $\lambda_{\text{ф}}$ в области высоких температур, возможен иной метод расчета, основанный на использовании этих данных и, что особенно важно, информации о скорости звука, получаемой непосредственно, которая учитывает как структуру вещества, так и его термодинамическое состояние. Такая возможность открывается в связи со следующим: как показано в работе (⁷), для мантии Земли отношение скорости звука к плотности является постоянной величиной, не изменяющейся с глубиной, кроме того постоянным является и средний атомный вес (молекулярный вес, деленный на число атомов в химической формуле), равный приблизительно 21.

Это позволило Берчу (^{7, 8}) установить возможный минералогический состав мантии и предположить, что она содержит в основном минералы, состоящие из кремния, магния и кислорода. Именно для многих минералов группы окислов средний атомный вес равен 21 (⁷). Эти соображения и были положены в основу возможного расчета глубинного профиля фононной теплопроводности в мантии Земли.

Известно, что для температуропроводности вещества можно записать

$$a = \frac{1}{3} \bar{v} \bar{l}, \quad (1)$$

где \bar{v} — средняя скорость звука, \bar{l} — средняя длина свободного пробега фона.

Согласно работам (^{2, 3}) за верхний предел температуры в недрах Земли на глубине ~30 км может быть принята величина 750–800° К. Следуя работе (⁷), для этой глубины определена температура Дебая:

$$\theta = 90,2 \cdot \rho \cdot \frac{1}{3} v \approx 800^\circ \text{ К}, \quad (2)$$

где ρ и v для этой глубины взяты из работы (⁶).

Следовательно, предполагаемая температура для этой глубины практически совпадает с температурой Дебая, а для теплопроводности в этом

случае справедливо выражение

$$\lambda = \frac{1}{3} c_v \bar{v} \bar{l}, \quad (3)$$

где c_v — теплоемкость на единицу объема, \bar{v} — средняя скорость звука.

В этом случае изменение теплопроводности в недрах Земли характеризуется изменением длины свободного пробега фонона, которая пропорциональна T^{-1} , и изменением скорости звука с глубиной.

Для глубины ~ 30 км ($T \sim 750^\circ \text{К}$) определено среднее значение температуропроводности исходя из имеющейся в литературе температурной зависимости $a = f(T)$ (⁹, ¹²). Для этого были выбраны некоторые основные окислы, имеющие плотность, близкую к плотности вещества на глубине ~ 30 км (оливин, перидотит, форстерит, пироксенит и др.). Средняя величина температуропроводности, согласно этим данным, при температуре $\sim 750^\circ \text{К}$ составляет $\sim 7 \cdot 10^3 \text{ см}^2/\text{сек}$.

Исходя из (1) и используя приведенное выше значение a и значение скорости звука, соответствующее глубине ~ 30 км, вычислено значение длины свободного пробега фононов, которая составляет $\sim (4-5) \text{ \AA}$. Эту оценку \bar{l} можно было бы произвести и по формуле (3), но значительно грубее, так как в (3) входит еще один параметр — теплоемкость. В соответствии с теорией Дебая длина свободного пробега фононов будет уменьшаться до тех пор, пока не достигнет своего минимального значения, не зависящего от температуры. Экспериментальные данные по зависимости $a = f(T)$ подтверждают постоянство значения l при высоких температурах (¹⁰). В дальнейшем, с ростом глубины, характер теплопроводности полностью определяется давлением. Оценка по размерам ионных радиусов основных элементов Si, O₂, Fe согласно (¹³) даст для минимальной длины свободного пробега значение, равное $\sim 2,5 \text{ \AA}$. Используя эти значения, можно определить температуру, до которой изменение теплопроводности происходит в основном за счет изменения l :

$$T_{\text{гп}} \approx \frac{l_{750}}{l_{\text{min}}} \cdot \frac{4,5}{2,5} \cdot 750 \sim 1300^\circ \text{К}.$$

Эта температура приблизительно соответствует глубине ~ 100 км. Выше этой температуры, таким образом, длина свободного пробега практически постоянна, а за изменение теплопроводности (температуропроводности) полностью отвечает изменение скорости звука с глубиной. Учитывая постоянство отношения $v/\rho = 1,8$, получаем для теплопроводности и температуропроводности следующие выражения:

$$\lambda = \frac{1}{3} c_p \rho^2 \frac{v}{\rho} l_{\text{min}} \sim \rho^2, \quad (4)$$

$$a = \frac{1}{3} \rho \frac{v}{\rho} l_{\text{min}} \sim \rho. \quad (5)$$

Для вывода (4) использовано известное соотношение

$$\lambda = c_p \rho a. \quad (6)$$

В формулах (4) и (5) сохранена плотность для упрощения расчета. С одинаковым успехом теплопроводность может быть выражена и через скорость звука.

В соответствии с поведением теплопроводности до глубин ~ 100 км $l \sim 1/T$ и согласно полученному выражению для теплопроводности (4) с использованием данных о плотности согласно работе (⁶) рассчитано распределение фононной теплопроводности в мантии Земли. Значение теплоемкости для глубин > 100 км при этом было взято постоянным и равным $\sim 0,3 \text{ кал}/(\text{г} \cdot \text{град})$, так как, согласно (¹⁴), при высоких температурах > 0

теплоемкость не зависит ни от T , ни от P .

Полученное распределение представлено на рис. 1. Решеточная теплопроводность сначала уменьшается с глубиной, достигая четкого минимума на глубине ~ 100 км, величина λ_{\min} равна приблизительно $5 \cdot 10^3$ см²/сек. Далее она существенно увеличивается до глубин 800–1000 км. Это увеличение связано со значительным ростом плотности на этой глубине. Выше 1000 км λ_{Φ} линейно увеличивается до глубины 3000 км.

Рассчитанный таким образом ход теплопроводности в мантии Земли аналогичен тому, который получен В. Н. Жарковым (кривая 2) за исключением следующих моментов: 1) величина λ_{Φ} согласно расчетам работы (3) почти в 2 раза меньше, чем по нашим данным, 2) минимум теплопроводности по результатам настоящей работы приходится на глубину ~ 100 км и составляет $\sim 5 \cdot 10^3$ кал/(см·сек·град), по данным работы (3) минимальное значение λ_{Φ} составляет $\sim 1,5 \cdot 10^3$ кал/(см·сек·град), при этом минимальное значение λ_{Φ} простирается на довольно широкий интервал глубин 100–500 км, 3) выше 1000 км кривые 1, 2 идут практически параллельно.

Недавно в работе (12) для расчета $\lambda_{\Phi \min}$ верхней мантии для такого же состава предложена следующая формула:

$$\lambda_{\Phi \min} = 0,003(1+z) \text{ кал/(см·сек·град)}, \quad (7)$$

где z — глубина в тыс. км.

Исходя из того, что $v \cdot \rho^{2/3}$ приблизительно пропорционально глубине, авторы работы рекомендуют данную формулу для расчета до глубин 1000 км (верхняя мантия). Их результаты представлены на рис. 1 кривой 3, которая проходит между кривыми 1, 2. Однако конкретные оценки $v \rho^{2/3}$ с использованием экспериментальных значений v и расчетных данных ρ (6) для состава мантии с веществом, у которого $M=21$, показывают, что такая аппроксимация весьма грубая. В этом можно убедиться по рис. 2, на котором представлена зависимость $\rho=f(z)$, так как $v/\rho=\text{const}$ для всей мантии Земли. Из рис. 2 видно, что эта зависимость весьма нелинейна, особенно в той области глубин, для которой авторы работы (12) рекомендуют использовать зависимость (7). Из рис. 2 следует, что линейность скорее всего справедлива для нижней мантии ($z \gg 1000$ км).

Остановимся еще на одном расчете поведения $\lambda_{\Phi \min}$ с глубиной. Для решеточной теплопроводности диэлектриков при высоких температурах, для которых достигается $\lambda_{\Phi \min}$, Займан (15) получил следующее выражение:

$$\lambda = kv(\rho/M)^{2/3}, \quad (8)$$

где k — постоянная Больцмана, v — постоянная средняя скорость звука.

Если учесть, что $v/\rho=\text{const}$, формула (8) принимает вид

$$\lambda_{\Phi \min} = \text{const } \rho^{2/3}. \quad (9)$$

Выражение (9) близко к полученному нами (4). Однако (4) является более точным, так как оно учитывает изменение скорости звука с измене-

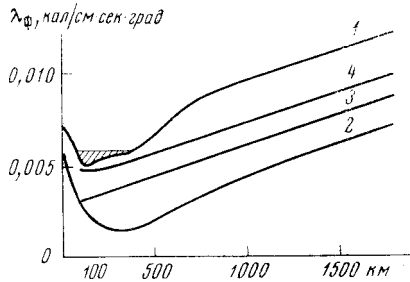


Рис. 1. Распределение фоновой теплопроводности в мантии Земли: 1 — наши данные, 2, 3, 4 — согласно работам (3, 12, 15) соответственно

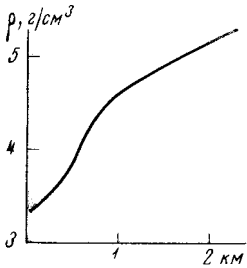


Рис. 2. Распределение плотности в мантии Земли (6)

выми 1, 2. Однако конкретные оценки $v \rho^{2/3}$ с использованием экспериментальных значений v и расчетных данных ρ (6) для состава мантии с веществом, у которого $M=21$, показывают, что такая аппроксимация весьма грубая. В этом можно убедиться по рис. 2, на котором представлена зависимость $\rho=f(z)$, так как $v/\rho=\text{const}$ для всей мантии Земли. Из рис. 2 видно, что эта зависимость весьма нелинейна, особенно в той области глубин, для которой авторы работы (12) рекомендуют использовать зависимость (7). Из рис. 2 следует, что линейность скорее всего справедлива для нижней мантии ($z \gg 1000$ км).

Остановимся еще на одном расчете поведения $\lambda_{\Phi \min}$ с глубиной. Для решеточной теплопроводности диэлектриков при высоких температурах, для которых достигается $\lambda_{\Phi \min}$, Займан (15) получил следующее выражение:

$$\lambda = kv(\rho/M)^{2/3}, \quad (8)$$

где k — постоянная Больцмана, v — постоянная средняя скорость звука.

Если учесть, что $v/\rho=\text{const}$, формула (8) принимает вид

$$\lambda_{\Phi \min} = \text{const } \rho^{2/3}. \quad (9)$$

Выражение (9) близко к полученному нами (4). Однако (4) является более точным, так как оно учитывает изменение скорости звука с измене-

нием плотности. Принимая в (9) $M=21$ и используя значения ρ из работы (6), для мантии Земли нами было рассчитано распределение теплопроводности с глубиной. Это распределение представлено на рис. 1 (кривая 4). Можно видеть, что эта кривая наиболее близка к рассчитанной по формуле (4). Наиболее близкое к нашим данным значение $\lambda_{\text{Ф min}}$ по Займану приходится на глубину ~ 100 км, что свидетельствует в пользу выбора нами $l_{\text{min}} \sim 2,5 \text{ \AA}$. Дальнейшее расхождение кривых 1, 4 вызвано неучетом \bar{v} от плотности в формуле Займана.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
23 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Е. А. Любимова, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 5 (1957). ² В. А. Магницкий, Внутреннее строение и физика Земли, 1965. ³ В. Н. Жарков, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 11 (1958). ⁴ А. Н. Тихонов, Изв. АН СССР, сер. геофиз. и географ., № 3, 431 (1937). ⁵ Б. Ю. Левин, С. В. Масва, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 2 (1960). ⁶ О. А. Андерсен, В кн.: Физическая акустика, т. 3, ч. В, М., 1968, стр. 62. ⁷ F. Berch, J. Geophys. Res., № 66, 2199 (1961). ⁸ F. Berch, In: Earth Today, N. Y., 1961, p. 295. ⁹ Г. И. Петрунин, Р. П. Юрчак, Изв. АН СССР, Физика Земли, № 11, 92 (1973). ¹⁰ Г. И. Петрунин, Канд. дисс., МГУ, 1972. ¹¹ Н. Н. Kanamori et al., J. Geophys. Res., № 73, № 2 (1968). ¹² S. F. Schatz, G. Simmoni, J. Geophys. Res., v. 77, № 35 (1972). ¹³ А. Г. Бегехин, Курс минералогии, М., 1961. ¹⁴ В. Н. Жарков, Изв. АН СССР, сер. геофиз., № 9 (1959). ¹⁵ Дж. Займан, Электроны и фононы, ИЛ, 1962.