Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 513. 881 *МАТЕМАТИКА*

Ю. А. БРЫЧКОВ

К ТЕОРИИ ПРОСТРАНСТВ $S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$

(Представлено академиком С. М. Никольским 31 V 1974)

Пространства $S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$, $\mathbf{r}=(r_1, r_2, \ldots, r_n)$, $r_i\geqslant 0$, с доминирующей смешанной производной были исследованы П. И. Лизоркиным и С. М. Никольским [1]. Для этих пространств в [1] были доказаны теоремы вложения, продолжения и теорема об интегральном представлении функций.

Ниже пространства $S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$ определяются для любых действительных значений r и для них формулируется ряд теорем.

1. Пусть $x=(x_1, \ldots, x_n)\in R_n$. Введем в пространстве S Л. Шварца систему норм $\{\|\varphi\|_{\mathbf{r}}\}$, где

$$\|\varphi\|_{\mathbf{r}}=\left\|\prod_{j=1}^{n} J_{x_j}^{-r_j}\varphi\right\|_{L_p(R_n)}, \quad 1<p<\infty,$$

$J_{x_j}^{-r_j}$ — оператор бесселева интегрирования порядка $-r_j$ по переменной x_j; числа r_j принимают любые действительные значения.

Определение 1. Пространством $S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$, $1<p<\infty$, r_i — любые действительные числа, называется пополнение пространства $S(R_n)$ по норме $\|\cdot\|_{\mathbf{r}}$.

Замечания. 1) $S_p^0L(R_n)=L_p(R_n)$. 2) Если $\rho_i\leqslant r_i$, то $S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)\subset \subset S_p^{\rho}L(R_n)$.

Теорема 1. *Если $f(x)\in S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$, $1<p<\infty$, $-\infty<r_i<\infty$, $i=1, \ldots, n$, то f представима в виде*

$$f=\prod_{i=1}^{n} J_{x_j}^{r_j}\varphi,$$

где $\varphi\in L_p(R_n)$. Это представление является характеристическим, т. е. из него следует, что $f\in S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$ и норма $\|f\|_{\mathbf{r}}$ эквивалентна норме $\|\varphi\|_{L_p}$.

Следствие. *При $\mathbf{r}\geqslant 0$ пространства $S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$ совпадают с пространствами, исследованными в* [1].

Обозначим через X^* пространство, сопряженное банахову пространству X.

Теорема 2. $(S_p^{\mathbf{r}}L(R_n))^*=S_q^{-\mathbf{r}}L(R_n)$ *при любом действительном* $\mathbf{r}$, $1/p+1/q=1$.

2. Пусть $S_p^*(R_n)$ — пространство обобщенных функций, регулярных в смысле $L_p(R_n)$ [2]. Можно доказать, что $S_p^*(R_n)=\bigcup_k S_p^{\mathbf{r}^k}L(R_n)$, где $\{\mathbf{r}^k\}$ — произвольная последовательность действительных векторов таких, что $r_j^k\to-\infty$ для всех j.

Пусть для каждого $i=1, 2, \ldots, n$ число r_i таково, что $f\in S_p^{\rho}L(R_n)$ при $\rho_i<r_i$ и некоторых ρ_j, $j\neq i$, и $f\notin S_p^{\rho}L(R_n)$, если $\rho_i>r_i$. Обозначим множество таких функций через $\hat{S}_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$. Если $f\in\hat{S}_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$ для некоторого i при любом r_i, то $r_i=+\infty$.

Теорема 3. *Множества $\hat{S}_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$ обладают следующими свойствами:*

1) $\hat{S}_p^{\mathbf{r}}L(R_n)\cap\hat{S}_p^{\rho}L(R_n)=0$ *при* $\rho\neq\mathbf{r}$;

2) $\hat{S}_p^{\mathbf{r}}L(R_n)=\prod_{j=1}^{n} J_{x_j}^{r_j-\rho_j}\hat{S}_p^{\rho}L(R_n)$;

3) $S_p^*(R_n)=\bigcup\limits_{\mathbf{r}}\hat{S}_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$, *где числа r_j пробегают все действительные значения* ($j=1, 2, \ldots, n$) *и значение* $+\infty$.

Определение 2. Порядком гладкости $r(f)$ регулярной в смысле L_p обобщенной функции f назовем индекс того множества $\hat{S}_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$, которому она принадлежит: $r(f)=\mathbf{r}$. Число $r_{x_j}(f)=r_j$, $j=1, \ldots, n$, будем называть порядком гладкости f по переменной x_j.

Таким образом, порядок $r(f)$ характеризует свойства гладкости функций из $S_p^*(R_n)$.

Теорема 4. *Пусть* $r(f)=\mathbf{r}$. *Тогда*:

а) $r\left(\prod\limits_{j=1}^{n} J_{x_j}^{q_j}f\right)=\mathbf{r}+\mathbf{q},\quad \mathbf{q}=(q_1, \ldots, q_n)$;

б) $r\left(\dfrac{d}{dx_i}f\right)=\boldsymbol{\rho}$, *где* $\rho_i=r_i-1, \quad \rho_j\geqslant r_j$ *при* $j\neq i$;

в) *если* $r(g)=-\boldsymbol{\rho}$, $r_i\neq\rho_i$ *и* $R_i=\min[r_i, \rho_i]$, *то* $r(f+g)=\mathbf{R}$, $\mathbf{R}=(R_1, \ldots, R_n)$.

Теорема 4 позволяет получать оценки гладкости решений некоторых линейных дифференциальных уравнений с частными производными. Рассмотрим, например, уравнение

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\,\partial y^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+Cu\equiv$$
$$\equiv J_x^{-2}J_y^{-2}u+A\frac{\partial u}{\partial x}+B\frac{\partial u}{\partial y}+(C-1)u=f,$$

где A, B, C — постоянные. Пусть $r(f(x, y))=(r_1, r_2)$; тогда если $u\in S_p^*(R_2)$, то $r(u)=(r_1+2, r_2+2)$.

Замечание. Порядок $r_{x_j}(f)$ в некотором смысле аналогичен целочисленному порядку сингулярности обобщенной функции по части переменных (взятому с противоположным знаком), введенному в ([3]) для пространства D^* и в ([4]) — для S^*.

3. Для пространства $S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$ справедливы теоремы вложения и продолжения, доказанные для $\mathbf{r}\geqslant 0$ в ([1]).

Теорема 5 (вложения). а) $S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)\to S_p^{\boldsymbol{\rho}}L(R_n)$, если $r_j\geqslant\rho_j$, $i=1, \ldots, n$;

б) $S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)\to S_q^{\boldsymbol{\rho}}L(R_n)$, *если* $\rho_j=\mathbf{r}_j-(1/p-1/q)$, $j=1, 2, \ldots, n$, $q>p>1$.

В общем случае функции из $S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$ являются обобщенными. Поэтому при исследовании свойств функций на гиперплоскостях различных размерностей нужно использовать понятие следа обобщенной функции, введенное С. М. Никольским ([2]).

Теорема 6. *Если* $f(x)\in S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$, $1<p<\infty$, $r_j>1/p$, *при* $i=m+1, \ldots, n$, *то* $f(x)$ *имеет след на почти любом подпространстве* $R_m=\{x\in R_n: x_{m+1}, \ldots$ $\ldots, x_n$ *фиксированы*$\}$.

Теорема 5′. $S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)\to S_p^{\boldsymbol{\rho}}L(R_m)$ *при условии* $r_i>1/p$, $i=m+1, \ldots, n$, *где* $\boldsymbol{\rho}=(r_1, \ldots, r_m)$.

Теорема о продолжении функций из $S_p^{\mathbf{r}}L(R_n)$, доказанная в ([1]) для $\mathbf{r}\geqslant 0$, переносится на случай произвольных действительных $\mathbf{r}$ без всяких изменений.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
14 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. И. Лизоркин, С. М. Никольский*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 77, 143 (1965). [2] *С. М. Никольский*, Сиб. матем. журн., т. 9, № 5, 1107 (1968). [3] *Ю. А. Брычков*, ДАН, т. 205, № 2, 271 (1972). [4] *Ю. А. Брычков*, Дифференциальные уравнения, т. 10, № 2, 281 (1974).