Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 513.6 **МАТЕМАТИКА**

О. Н. ВВЕДЕНСКИЙ

О ДВОЙСТВЕННОСТИ В ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ НАД КВАЗИЛОКАЛЬНЫМ ПОЛЕМ

(Представлено академиком В. М. Глушковым 10 VI 1974)

Пусть k — квазилокальное поле ([14]), A — абелево многообразие над k, A_k — группа k-рациональных точек A, $\pi_1(A_k)$ — фундаментальная группа ([5]) проалгебраической ([5, 7]) группы A_k, $H^1(k, A)$ — группа главных однородных пространств над A, $p>0$ — характеристика поля вычетов поля k.

В работе ([1]) И. Р. Шафаревич (и независимо, в несколько иных терминах А. П. Огг ([2])) установил существование невырожденного спаривания

$$H^1(k, A)\times\pi_1(A_k)\underset{p}{\to}Q/\mathbf{Z} \qquad ({}_p\check{S})$$

(индекс p внизу означает: по модулю p-компонент соответствующих групп) и поставил вопрос о его продолжении с сохранением невырожденности на основные p-компоненты.

Затем А. Нерон ([8]) показал, что если A — эллиптическая кривая типа (c) над k, то $H^1(k, A)=0$, дав тем самым отрицательный ответ на указанный выше вопрос. Оказалось, однако ([9, 12]), что этот результат А. Нерона ошибочен.

Цель настоящей работы — доказательство следующего утверждения.

Теорема. *Если A — эллиптическая кривая над k, изоморфная над некоторым конечным расширением Галуа поля k кривой типа* (I) — (II) ([11]), *то существует невырожденное спаривание*

$$H^1(k, A)\times\pi_1(A_k)\xrightarrow{\check{S}}Q/\mathbf{Z},$$

продолжающее естественным образом спаривание ${}_p\check{S}$.

Замечания. 1) Предложенный способ продолжения спаривания ${}_p\check{S}$ действует и для соответствующих абелевых многообразий произвольной размерности; неясно пока, как доказать в этой ситуации невырожденность.

2) Предложенный способ продолжения спаривания ${}_pS$ не действует, например, в эллиптических кривых типа (III) над k ([11]).

Переходим к наброску доказательства теоремы.

Пусть $\mathfrak{o}_k$ — кольцо целых k, U_k — группа единиц k, l/k — конечное расширение Галуа, $\mathfrak{g}=\mathrm{Gal}(l/k)$. Если X — $\mathfrak{g}$-модуль, то $H^n(\mathfrak{g}, X)$, $n\in\mathbf{Z}$, — тэйтовские когомологии $\mathfrak{g}$ с коэффициентами в X. Для эллиптической кривой A над k $\mathrm{Div}_0(A)$ — группа дивизоров нулевой степени на A и $\Sigma:\mathrm{Div}_0(A)\to A$ — гомоморфизм, индуцируемый сложением на A.

1. Пусть A — кривая типа (I) над k

$$y^2=x^3+ax+b, \quad a,b\in\mathfrak{o}_k, \quad 4a^3+27b^2\in U_k.$$

Пусть $\bar{a}$ — редукция точки a для точки $a\in A$ и пусть $\bar{D}$ — редукция дивизора D для дивизора $D\in\mathrm{Div}_0(A)$ в естественно понимаемом смысле.

Определяем спаривание

$$H^1(\mathfrak{g}, A_l)\times H^{-1}(\mathfrak{g}, A_l)\xrightarrow{p\check{s}}H^1(\mathfrak{g}, U_l),$$

сопоставляя классу $H^1(\mathfrak{g}, A_l)$, представителем которого является коцикл

$f(\sigma)$, $\sigma\in\mathfrak{g}$, и классу $H^{-1}(\mathfrak{g}, A_l)$, представителем которого является элемент $a_l\in A_l$, класс $H^1(\mathfrak{g}, U_l)$, представителем которого является коцикл, значение которого в $\sigma\in\mathfrak{g}$ есть

$$\left\{\prod_{\tau\in\mathfrak{g}} G_{\sigma,\tau}(\sigma\tau\mathfrak{A}_l)\right\} / H(F(\sigma)),$$

где $F(\sigma)$, $\sigma\in\mathfrak{g}$ и $\mathfrak{A}_l$ — такие элементы $\mathrm{Div}_0(A)$, что носители $\mathrm{Supp}F(\sigma)$, $\sigma\in\mathfrak{g}$, $\mathrm{Supp}\,\mathfrak{A}_l$ дивизоров $F(\sigma)$, $\sigma\in\mathfrak{g}$, и $\mathfrak{A}_l$ соответственно лежат в A_l;

$$\overline{\mathrm{Supp}F(\sigma)}\cap\overline{\mathrm{Supp}\mathfrak{A}_l}=\emptyset, \quad \sigma\in\mathfrak{g},$$

$$\Sigma(F(\sigma))=f(\sigma), \quad \sigma\in\mathfrak{g}, \quad \Sigma(\mathfrak{A}_l)=a_l.$$

$G_{\sigma,\tau}$ — функция на A с дивизором $\sigma F(\tau)-F(\sigma\tau)+F(\sigma)$, σ, $\tau\in\mathfrak{g}$, H — функция на A с дивизором $\sum\tau\mathfrak{A}_l$.

Основу спаривания $\check{\mathrm{p}\mathrm{s}}$ представляет, конечно, ограничение на U_l спаривания Д. К. Фаддеева [3] — С. Лэнга [4].

Естественные изоморфизмы [11, 6]

$$H^{-1}(\mathfrak{g}, A_l)\xrightarrow{\sim}H^0(\mathfrak{g}, \pi_1(A_l)), \quad H^1(\mathfrak{g}, U_l)\xrightarrow{\sim}H^2(\mathfrak{g}, \pi_1-(U_l))$$

вместе с канонической [6] инъекцией

$$0\to H^2(\mathfrak{g}, \pi_1(U_l))\xrightarrow{\mathrm{inv}} Q/\mathbf{Z}$$

определяют индуцированное спариванием $\mathrm{p}\check{\mathrm{s}}$ спаривание

$$\check{\mathrm{S}}\mathrm{h}: H^1(\mathfrak{g}, A_l)\times H^0(\mathfrak{g}, \pi_1(A_l))\to Q/\mathbf{Z},$$

которое очевидным образом определяет спаривание $\check{S}$.

Доказательство невырожденности спаривания $\check{\check{S}}$ использует прямое вычисление спаривания $\mathrm{p}\check{\mathrm{s}}$ для простых циклических расширений на основе вычислений [14] (на этом же пути можно выяснить соотношение между спариваниями $\check{S}$ и ${}_p\check{S}$), аналог тэйтовской редукционной диаграммы для башен конечных расширений k [10] и тривиальность универсальных норм [13].

2. Пусть A — кривая типа (II) над k

$$y^2=(x-\varepsilon)^2(x+2\varepsilon)+\delta t^s, \quad s\in\mathbf{Z}, \quad s\geqslant1,$$

где ε, $\delta\in U_k$, t — простой элемент k. В этом случае действует та же схема, что и для кривых типа (I), но вместо $H^{-1}(\mathfrak{g}, A_l)$ нужно рассматривать $H^{-1}(\mathfrak{g}, A_l^0)$, где A_l^0 — связная компонента проалгебраической группы [5] A_l.

3. Пусть, например, A — кривая типа (c_1) над k [7]

$$y^2=x^3+tax+t\varepsilon, \quad a\in\mathfrak{o}_k, \quad \varepsilon\in U_k,$$

изоморфная над $l=k(t^{1/6})$ кривой типа (I) над k. Определяем

$$\check{S}_k(A)(\alpha, \beta)={}^1/_6\, \check{S}_l(A)(\mathrm{res}\,\alpha, \beta), \quad \alpha\in H^1(k, A), \ \beta\in\pi_1(A_k),$$

$$\mathrm{res}\colon H^1(k, A)\to H^1(l, A),$$

и редуцируем доказательство невырожденности спаривания $\check{S}_k(A)$ к известной уже невырожденности спаривания $\check{S}_l(A)$.

4. Для кривой A типа (II) над k группа $H'(k, A)$ изоморфна [11] группе характеров по Понтрягину группы Галуа максимального абелевого расширения k. Спаривание $\check{\check{S}}_k$ дает в этом случае новый подход к построению изоморфизма взаимности Серра [6].

Львовский филиал математической физики
Института математики Академии наук УССР

Поступило
21 III 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Р. Шафаревич,* Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова, т. 64, 316 (1961). [2] *А. Р. Ogg,* Ann. Math., v. 76, № 2, 185 (1962). [3] *Д. К. Фаддеев,* Вестн. Ленингр. унив., сер. матем., № 7, 45 (1957). [4] *S. Lang,* Am. J. Math., v. 79, № 2, 319 (1957). [5] *J. P. Serre,* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ., Publ. Math., № 7, 1 (1960). [6] *J. P. Serre,* Bull. Soc. Math. France, v. 89, 105 (1961). [7] *A. Neron,* Inst. Hautes Etudes Sci. Publ., Publ. Math., № 21, 1 (1964). [8] *A. Neron,* Local Fields, Berlin, 1967. [9] *A. Neron,* Symposia mathematica, v. 3, Bologna, 1970. [10] *J. Tate,* Sem. Bourbaki, № 156, 1 (1957). [11] *О. Н. Введенский,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 30, № 4, 891 (1966). [12] *О. Н. Введенский,* Матем. сб., т. 83, № 3, 474 (1970). [13] *О. Н. Введенский,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 37, № 4 (1973). [14] *О. Н. Введенский,* Изв. АН СССР, сер. матем., т. 37, № 1, 20 (1973).