Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 519.1 МАТЕМАТИКА

Ю. М. ВОЛОШИН

ПЕРЕЧИСЛЕНИЕ ТЕРМОВ ПРЕДМЕТНЫХ ОБЛАСТЕЙ ПО ГЛУБИНЕ ВЛОЖЕННОСТИ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 13 V 1974)

1. В работе [1] было введено следующее понятие предметной области: предметная область $\mathbf{D}$ спецификации $(c_0{}^0 c_1{}^{m_1}\ldots c_n{}^{m_n})$ — совокупность термов, получаемых из данного количества $c_0\neq 0$ знаков переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{c_0}$ и данных количеств $c_i\neq 0$ m_i-местных функциональных знаков

$$f_1^{(m_i)},\ f_2^{(m_i)},\ \ldots,\ f_{c_i}^{(m_i)},$$

$i=1, 2, \ldots, n$, с помощью композиции. Терм, как обычно, определяется индуктивно: 1) переменная есть терм, 2) если $f^{(i)}$ — i-местный функциональный знак и $a_1, a_2, \ldots, a_i$ — термы, то $f^{(i)}(a_1, a_2, \ldots, a_i)$ — терм, 3) никаких других термов не существует. Глубиной вложенности данного вхождения терма $a\in\mathbf{D}$ как подтерма в терм $b\in\mathbf{D}$ назовем число термов, содержащих данное вхождение. Максимальную из глубин вложенности всех вхождений переменных в терм назовем глубиной терма. На языке функциональных деревьев [1], представляющих структуру терма, глубина терма — высота соответствующего функционального дерева. В работе рассматриваются задачи перечисления термов по глубине вложенности и подобным ей характеристикам.

2. Пусть $h_k(c_0{}^0 c_1{}^{m_1}\ldots c_n{}^{m_n})$ — число термов спецификации $(c_0{}^0 c_1{}^{m_1}\ldots c_n{}^{m_n})$ глубины k, $k\geqslant 0$.

Лемма 1. *Величина $h_k(c_0{}^0 c_1{}^{m_1}\ldots c_n{}^{m_n})$ удовлетворяет рекуррентному соотношению **

$$h_k(c_0{}^0 c_1{}^{m_1}\ldots c_n{}^{m_n})=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} c_i \sum \prod_{l=1}^{m_i} h_{i^{(l)}}(c_0{}^0 c_1{}^{m_1}\ldots c_n{}^{m_n}),\qquad h_0(c_0{}^0 c_1{}^{m_1}\ldots c_n{}^{m_n})=c_0,$$

где внутренняя сумма берется по всем системам целых неотрицательных чисел $\{i^{(p)}\}$, $p=1, \ldots, m_i$, таким, что

$$\max(i^{(1)}, i^{(2)}, \ldots, i^{(m_i)})=k-1,\quad k=1, 2, \ldots$$

Определение. Пусть $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ — два формальных степенных ряда; их $*$-произведением называется степенной ряд $h(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, $c_n=\sum_{\max(i,j)=n} a_i b_j$.

Лемма 2. $f(x)*g(x)=(1-x)((f(x)/(1-x))\otimes(g(x)/(1-x)))$, *где $\otimes$ — произведение Адамара, определяемое для степенных рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ как степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$.*

Следствия. *Имеют место следующие свойства $*$-произведения как следствия соответствующих свойств произведения Адамара:*

1) *если $f(x)$ и $g(x)$ — рациональные функции, то $f(x)*g(x)$ — также рациональная функция* [2, 3];

---

* В дальнейшем в конечных суммах суммирование идет по i от 1 до n, если не указаны другие границы суммы.

2) *если $f(z)$ как функция комплексного переменного z имеет особые точки $\{\alpha_i\}$ и $g(z)-\{\beta_i\}$ соответственно, то особые точки функции $f(z)*$ $*g(z)$ находятся среди точек* $\{1\}\cap\{\alpha_i\}\cap\{\beta_i\}\cap\{\alpha_i\beta_j\}$ ([4]).

Рассмотрим производящую функцию для величин h_k

$$H(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n};t)=\sum_{k=0}^{\infty}h_k(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n})t^k.$$

Непосредственно из леммы 1 и определения $*$-произведения следует, что функция $H(t)$ (спецификация опущена) удовлетворяет уравнению

$$H(t)=c_0+t\sum_{i=1}^{n}c_i(H(t))^{*m_i},$$

где $(H(t))^{*m_i}$ — m_i-я $*$-степень.

Пусть $\bar{h}_k(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n})$ — число термов глубины, меньшей либо равной k, $k\geqslant0$. Для производящей функции

$$\bar{H}(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n};t)=\sum_{k=0}^{\infty}\bar{h}_k(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n})t^k$$

имеет место соотношение (спецификация опущена) $H(t)=(1-t)\bar{H}(t)$, из которого следует рекуррентное соотношение

$$\bar{h}_k(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n})=c_0+\sum c_i\bar{h}_{k-1}^{m_i}(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n}),\quad \bar{h}_0(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n})=c_0.$$

Если ограничиться перечислением только таких термов из предметной области спецификации $(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n})$, у которых глубина вложенности всех вхождений переменных одинакова и равна k, то, обозначив их количество через e_k, для производящей функции

$$E(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n};t)=\sum_{k=0}^{\infty}e_k(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n})t^k$$

имеем уравнение (спецификация опущена)

$$E(t)=c_0+t\sum c_i(E(t))^{\otimes m_i},$$

где $(E(t))^{\otimes m_i}$ — m_i-я $\otimes$-степень, и рекуррентное соотношение

$$e_k=\sum c_ie_{k-1}^{m_i},\qquad e_0=c_0.$$

Теорема 1. *Для любого натурального α имеет место соотношение*

$$h_k(c_0{}^0(\alpha c_1)^{m_1}\dots(\alpha c_n)^{m_n})=\alpha h_{k-1}(C_0{}^0(C_1\alpha)^1\dots(C_N\alpha^N)^N),\ k=1,\ 2,\dots,$$

где

$$N=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{m_i\},\quad C_0=\sum_{i=1}^{n}c_ic_0^{m_i},\quad C_j=\sum_{p=j}^{n}c_p\binom{m_p}{j}c_0^{m_p-j},\quad j=1,2,\dots,N.$$

Теорема 2. *Для произвольных целых неотрицательных чисел k, l имеет место равенство*

$$e_k((e_l(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n}))^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n})=e_l((e_k(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n}))^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n}).$$

Пусть $y_n(k)$ — количество термов длины k (длина терма ([1]) — суммарное количество вхождений функциональных знаков и переменных) и глубины, меньшей либо равной k. Тогда для производящей функции $Y_h(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\dots c_n{}^{m_n};\ t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}y_n(k)t^k$ имеет место рекуррентное соотношение

(спецификация опущена)

$$Y_{h+1}(t)=t\left(c_0+\sum c_i(Y_h(t))^{m_i}\right),\qquad Y_0(t)=c_0t. \tag{1}$$

3. Все предыдущие рассмотрения естественно переносятся на случай бесконечных спецификаций $(c_0{}^0c_1{}^{m_1}\ldots c_2{}^{m_2}\ldots)$, за исключением перечисления термов по сложности и глубине (производящие функции $X_h(t)$ и $XE_h(t)$).

Для предметной области $\mathrm{D}(1^01^11^2\ldots)$, функциональные деревья которой являются упорядоченными деревьями [5], в силу (1) получим для производящей функции рекуррентное соотношение

$$Y_{h+1}(t)=t/(1-Y_h(t)),\quad Y_0(t)=t.$$

Отсюда следует, что $Y_h(t)$ есть h-я подходящая дробь цепной дроби

$$\cfrac{t}{1-\cfrac{t}{1-\cfrac{t}{1-\ldots}}}$$

Из этого представления следует, что

$$Y_h(t)=\frac{tF\left(-\frac{h}{2},\frac{1-h}{2};-h,4t\right)}{F\left(-\frac{h+1}{2},-\frac{h}{2};-h-1,4t\right)}, \tag{2}$$

где $F(x)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Из (2), разлагая в ряд, непосредственно получим явное выражение

$$y_h(k)=\frac{2^{2k-1}}{h+2}\sum_{l=1}^{h+1}\cos^{2(k-1)}\frac{\pi l}{h+2}\sin^2\frac{\pi l}{h+2},$$

которое другими методами получено в работах [6, 9, 10].

Для производящей функции $Z_h(t)$ числа $z_h(k)$ упорядоченных деревьев с k концевыми вершинами («кроной») и высотой, меньшей либо равной h, имеем

$$Z_{h+1}(t)=t+Z_h(t)/(1-Z_h(t)),\quad Z_0(t)=t.$$

Поскольку $Z_h(t)=1/(Y_{2h}(1/t))$, то в силу (2) получаем, что

$$Z_h(t)=\frac{tF(-h+{}^1/_2,-h;-2h-1,4/t)}{F(-h,-h+{}^1/_2;-2h,4/t)},$$

и явное выражение

$$z_h(k)=\frac{2^{-2(k-1)}}{2h+1}\sum_{l=1}^{h}\cos^{-2k}\frac{\pi l}{2h+1}\sin^2\frac{\pi l}{2h+1},\qquad k>1,\qquad h>0;\qquad z_h(1)=h+1.$$

Теорема 3. *Количество упорядоченных деревьев с k вершинами, у которых высоты всех концевых точек над корнем одинаковы и равны h, равно количеству композиций (т. е. неупорядоченных разбиений) числа $k-h-1$ на части, меньшие либо равные h.*

Теорема 4. *Количество упорядоченных деревьев с k концевыми вершинами, равноудаленными на расстояние h от корня, равно h^{k-1}.*

Этот результат в терминах «комбинаций h-го порядка» получен Макмагоном [7]. Заметим, что при $h=2$ из теоремы 4 следует естественная «деревянная» интерпретация всех композиций числа k, количество которых равно 2^{k-1}.

4. Суммарная глубина терма определяется как сумма глубин вложенности всех вхождений всех подтермов данного терма. Это понятие соответствует понятию «суммарная высота», введенному для деревьев в [8] и выражающему сумму расстояний от каждой вершины до корня дерева.

Производящая функция

$$T(c_0^0c_1^{m_1}\dots c_n^{m_n};x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}t_{kh}(c_0^0c_1^{m_1}\dots c_n^{m_n})x^ky^h$$

удовлетворяет уравнению (спецификация опущена)

$$T(x,y)=x\left(c_0+\sum c_i(T(xy,y))^{m_i}\right).$$

Далее, внешней глубиной терма назовем сумму глубин вложенности всех вхождений переменных; внутренней глубиной терма назовем сумму глубин вложенности всех вхождений всех подтермов данного терма, отличных от переменных. Эти понятия соответствуют понятиям «длина внешнего (внутреннего) пути дерева» для деревьев [5], определяемым как сумма расстояний от всех концевых вершин до корня и соответственно как сумма по всем внутренним вершинам дерева. Для соответствующих производящих функций $TE(c_0^0c_1^{m_1}\dots c_n^{m_n};\ x,\ y)$ и $TI(c_0^0c_1^{m_1}\dots c_n^{m_n};\ x,\ y)$ справедливы уравнения (спецификация опущена)

$$TE(x,y)=c_0x+\sum c_i(TE(xy,y))^{m_i},\qquad TI(x,y)=c_0+x\sum c_i(TI(xy,y))^{m_i}.$$

Производящие функции, удовлетворяющие указанным выше уравнениям, имеют сложную природу. Даже в простейшем случае спецификации (1^01^1) производящая функция $T(x,\ y)$ имеет вид $T(x,\ y)=\sum_{n=1}^{\infty}x^ny^{n(n-1)/2}$ и связана соотношением

$$e^{-2\pi iz}T(e^{2\pi iz},\ q^2)+e^{2\pi iz}T(e^{-2\pi iz},\ q^2)=\vartheta_2(z,\ q)q^{-1/4}.$$

с тэта-функциями. Тем не менее нахождение t_{kh}, te_{kh} и ti_{kh} может быть сведено к решению алгебраических уравнений.

Для упорядоченных деревьев уравнение для производящей функции $T(x,y)$ имеет вид $T(x,y)=x/(1-T(xy,y))$, откуда следует представление в виде цепной дроби С. Рамануджана

$$T(x,y)=\cfrac{x}{1-\cfrac{xy}{1-\cfrac{xy^2}{1-\dots}}}$$

Величину $h(n)=\sum_{h=n-1}^{n(n-1)/2}ht_{nh}/\sum_{h=n-1}^{n(n-1)/2}t_{nh}$ можно рассматривать как среднее значение суммарной высоты для деревьев длины n при допущении равной вероятности всех деревьев.

Теорема 5. *Среднее значение суммарной высоты для упорядоченных деревьев с n вершинами имеет вид*

$$h(n)=\frac{n}{2}\left(4^{n-1}\Big/\binom{2n-2}{n-1}-1\right)\approx\frac{\sqrt{\pi}}{2}n\sqrt{n}.$$

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
13 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Yu. M. Voloshin*, J. Combinatorial Theory, v. 12, № 2, 202 (1972). [2] *D. A. Klarner*, Am. Math. Monthly, v. 74, № 7, 813 (1967). [3] *L. Carlitz*, Boll. Un. Mat. Ital. (4), v. 1, № 3, 362 (1968). [4] *E. C. Titchmarsh*, The Theory of Functions, Oxford, 1932. [5] *E. C. Knuth*, The Art of Computer Programming, v. 1, Reading, 1968. [6] *И. В. Ковальцев, Е. П. Липатов*, Кибернетика, № 5, 106 (1970). [7] *P. A. Machmahon*, Combinatory Analysis, v. 1, Cambridge, 1915. [8] *J. Riordan, N. J. Sloane*, J. Austral. Mat. Soc., v. 10, № 3, 278 (1969). [9] *N. G. de Bruijn, D. E. Knuth, S. O. Rice*, Graph Theory and Computing, N. Y., 1972. [10] *Yamashita Masahiro*, Joho Shori, v. 13, № 8, 575 (1972).