Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 4

УДК 513.88 *МАТЕМАТИКА*

В. В. ФЕДОРЧУК

СОВМЕСТИМОСТЬ НЕКОТОРЫХ ТЕОРЕМ ОБЩЕЙ ТОПОЛОГИИ С АКСИОМАМИ ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 19 VII 1974)

1. В работе формулируется аксиома Ф, совместная с аксиомами Цермело — Френкеля теории множеств, с помощью которой оказалось возможным решить ряд проблем общей топологии.

П. С. Александров поставил вопрос о размерности дополнения до внутреннего размерностного ядра наследственно нормального бикомпакта (см. ([1]), гл. 5 § 9, п. 3). Теорема 6 утверждает, что эта размерность может совпадать с размерностью самого бикомпакта.

В. В. Филиппов построил пример наследственно нормального пространства, в котором размерности dim и Ind не обладают свойством монотонности (см. ([8])). Тем самым были решены проблемы Чеха и Даукера. Теоремы 4 и 5 показывают существование наследственно нормальных бикомпактов, в которых размерности dim и Ind не обладают свойством монотонности. Там же утверждается существование понижающих размерности dim и Ind нульмерных совершенных отображений локально бикомпактных совершенно нормальных пространств. Это также усиливает аналогичные результаты В. В. Филиппова, в которых отсутствовала либо совершенная нормальность, либо локальная бикомпактность (см. ([7], [8])).

А. В. Архангельский поставил вопрос, всякое ли вполне регулярное пространство, в котором свойство Суслина выполнено наследственно, имеет счетный псевдохарактер в каждой своей точке (см. ([3])). Заметим, что не было даже известно примера наследственно суслинского не совершенно нормального бикомпакта. Теорема 2 утверждает существование наследственно сепарабельного несеквенциального бикомпакта с рядом других интересных свойств. Тем самым дан ответ и на вопрос Мура и Мрувки: всякий ли бикомпакт счетной тесноты секвенциален (см. ([5])).

На III Пражском симпозиуме по общей топологии А. В. Архангельским был поставлен целый ряд вопросов о бикомпактах счетной тесноты (см. ([2])). В частности, верно ли для бикомпакта X счетной тесноты одно из следующих утверждений:

а) Если $2^{\aleph_0}=\aleph_1$, то X обладает 1-й аксиомой счетности в некоторой точке.

б) Если $c(X)=\aleph_0$, то $|X|\leqslant 2^{\aleph_0}$.

в) Если $|X|\geqslant\aleph_0$, то X содержит александровскую компактификацию αN натурального ряда N.

Теорема 3 показывает, что ни одно из этих утверждений не верно. Надо отметить, что утверждение в) представляет собой ослабление гипотезы Б. А. Ефимова (см. ([4])) о том, что всякий бесконечный бикомпакт содержит либо стоун-чеховскую, либо александровскую компактификацию натурального ряда N. Отрицательное решение этой гипотезы было недавно дано мною в ([6]).

2. Через $L(\beta)$ обозначим множество всех предельных порядковых чисел, меньших чем β. Для $\alpha\in L(\omega_1+1)$ функцию s назовем (α)-*последовательностью*, если:

1) $\operatorname{rng} s\subset\mathbf{R}$,

2) $\operatorname{dom} s \subset \omega_1$,

3) $\sup \operatorname{dom} s = \alpha$.

Через ${}^{(\alpha)}\mathbf{R}$ обозначим множество всех (α)-последовательностей. Для $\beta \leqslant \omega_1+1$ положим ${}^{(\beta)}\mathbf{R} = U\{{}^{(\alpha)}\mathbf{R} \mid \alpha \in L(\beta)\}$.

Множество $\sigma \subset {}^{(\omega_1)}\mathbf{R}$ назовем (ω_1)-гиперпоследовательностью, если

$$|\sigma \cap {}^{(\alpha)}\mathbf{R}| = 1 \quad \text{для} \quad \forall\ \alpha \in L(\omega_1).$$

Назовем (ω_1)-гиперпоследовательность σ-универсальной, если $\forall s \in {}^{(\omega_1)}\mathbf{R}$ существует такой ординал $\alpha \in L(\omega_1)$, что $s|\alpha \in \sigma$.

Аксиома Φ. *Существует универсальная (ω_1)-гиперпоследовательность.*

Заметим, что $\Phi \Rightarrow 2^{\aleph_0} = \aleph_1$.

Теорема 1. *Если* $\operatorname{Con}(\mathrm{ZFC})$, *то* $\operatorname{Con}(\mathrm{ZFC}+\Phi)$.

Теорема 2 (Φ). *Для всякого $n \geqslant 0$ существует такой бикомпакт A_n, что*:

1) *A_n наследственно сепарабелен;*

2) *A_n не секвенциален;*

3) *A_n локально метризуем во всех точках, кроме одной точки x^0;*

4) *Для любого замкнутого множества $F \subset A_n$ либо F, либо $A_n \setminus F$ метризуемо;*

5) *A_n наследственно нормален;*

6) *Пространство $A_n \setminus \{x^0\}$ совершенно нормально и счетно-компактно* *.

7) $\dim A_n = \operatorname{Ind} A_n = n$.

8) *Если $F = [F] \subset A_n$ и $[F \setminus \{x^0\}] \ni x^0$, то* $\operatorname{ind}_{x^0} F = n$.

9) *Для всякого подмножества $G \subset A_n$ имеем* $\dim G = \operatorname{Ind} G \leqslant n$.

Теорема 3 (Φ). *Для любого существует такой $n \geqslant 0$ бикомпакт B_n, что*:

1) $t(B_n) = \aleph_0$.

2) $\pi w(B_n) = \aleph_0$.

3) $|B_n| = 2^{\mathfrak{c}}$.

4) *Если замкнутое множество $F \subset B_n$ бесконечно, то $|F| = 2^{\mathfrak{c}}$.*

5) $\dim B_n = n$.

6) *Если $x \in [F_i \setminus \{x\}]$, $i \in \omega$, $F_i = [F_i]$, то* $\dim \cap F_i = n$ *и* $x \in [\cap F_i \setminus \{x\}]$.

Теорема 4 (Φ). *Для любого $n \geqslant 1$ существует такой наследственно нормальный бикомпакт C_n, что*:

1) $\dim C_n = \operatorname{Ind} C_n = n$.

2) $\operatorname{Ind}(C_n \setminus \{y^0\}) = n+1$, *где* $y^0 \in C_n$.

3) $\dim G \leqslant n$ *для всякого* $G \subset C_n$.

4) *Пространство $C_n \setminus \{y^0\}$ совершенно нормально.*

5) *Существует нуль-мерное совершенное отображение пространства $C_n \setminus \{y^0\}$ на пространство $A_n \setminus \{x^0\}$* **.

Теорема 5 (Φ). *Для любого $n \geqslant 0$ существует такой наследственно нормальный бикомпакт D_n, что*

1) $\dim D_n = \operatorname{Ind} D_n = n$.

2) $\dim(D_n \setminus \{z^0\}) = \operatorname{Ind}(D_n \setminus \{z^0\}) = n+1$, *где* $z^0 \in D_n$.

3) *Пространство $D_n \setminus \{z^0\}$ совершенно нормально.*

4) *Существует нуль-мерное совершенное отображение пространства $D_n \setminus \{z^0\}$ на такое пространство E_n, то* $\dim E_n = \operatorname{Ind} E_n = n$.

Напомним одно определение (см. ([1]), гл. 5 § 9, п. 3). Внутренним размерностным ядром K_X n-мерного бикомпакта X называется объединение всех размерностных компонент (максимальных n-мерных канторовых подмногообразий) бикомпакта X.

---

* Пространство $A_0 \setminus \{x^0\}$ локально счетно.

** Заметим, что $\operatorname{Ind}(A_n \setminus \{x^0\}) = n$.

Теорема 6 (Ф). *Для всякого* $n \geqslant 1$ *существует такой наследственно нормальный бикомпакт* F_n, *что* $\dim F_n = n$ *и* $\dim(F_n \setminus K_{F_n}) = n$.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
19 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *П. С. Александров, Б. А. Пасынков,* Введение в теорию размерности, М., «Наука», 1973. [2] *А. В. Архангельский,* Тр. III Пражского топологического симпозиума, 1971, стр. 34. [3] *А. В. Архангельский,* ДАН, т. 203, № 5, 983–985 (1972). [4] *Б. А. Ефимов,* ДАН, т. 189, № 2, 244 (1969). [5] *R. C. Moore, S. G. Mrówka,* Notices Am. Math. Soc., v. 11, № 5 (1964). [6] *В. В. Федорчук,* Матем. сб., 1974. [7] *В. В. Филиппов,* ДАН, т. 205, № 1, 40 (1972). [8] *В. В. Филиппов,* ДАН, т. 203, № 4, 805 (1973).