Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 4

УДК 517.54:517.862

МАТЕМАТИКА

В. В. ЧУЕШЕВ

О МОДУЛЯХ ГРУПП ШОТТКИ

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 17 VII 1974)

1. Известно, что любая компактная риманова поверхность может быть униформизирована группой Шоттки (см., например ([1])). Поэтому представляет интерес изучение пространства классов эквивалентности так называемых отмеченных групп Шоттки данного рода g, которое обозначим через S_g, и нахождение параметров (модулей), описывающих эти классы. Пространство S_g изучалось в ([2]), где описано вложение S_g в $\mathbf{P}_3(\mathbf{C})^g$. В настоящей работе вводятся другие модули для точек пространства S_g, имеющие простой геометрический смысл и позволяющие строить группы Шоттки. Устанавливается также, что если из S_g удалить некоторое подмножество F, не разбивающее S_g, то оставшаяся часть $S_g \setminus F$ может быть вложена как область в $\mathbf{C}^{3g-3}$.

2. Группа G дробно-линейных отображений расширенной комплексной плоскости $\overline{\mathbf{C}}$ называется отмеченной группой Шоттки рода $g\geqslant 1$ со стандартными порождающими $T_1, \ldots, T_g$, если существуют непересекающиеся замкнутые жордановы кривые $\Gamma_1, \Gamma_1', \ldots, \Gamma_g, \Gamma_g'$, составляющие границу $2g$-связной области D и такие, что $T_j(D)\cap D=\varnothing$, $T_j(\Gamma_j)=\Gamma_j'$, $j=1, \ldots, g$. В этом случае будем писать $G=\langle T_1, \ldots, T_g\rangle$.

Две (отмеченные) группы Шоттки $G=\langle T_1, \ldots, T_g\rangle$ и $G'=\langle T_1', \ldots, T_g'\rangle$ называются эквивалентными, если существует дробно-линейное отображение B такое, что $BT_jB^{-1}=T_j'$, $j=1, \ldots, g$. Обозначим через $[G]$ класс эквивалентности, содержащий G.

Введем на пространстве S_g классов эквивалентности топологию, считая $[G_n]\to[G]$, если найдутся представители $\langle T_{1n}, \ldots, T_{gn}\rangle\in[G_n]$ и $\langle T_1, \ldots, T_g\rangle\in[G]$ такие, что $\lim\limits_{n\to\infty} T_{jn}(z)=T_j(z)$, $j=1, \ldots, g$, $z\in\mathbf{C}$. При этом S_g становится отделимым топологическим пространством, которое мы будем называть пространством Шоттки рода g.

Проблема модулей для S_g заключается в следующем: найти параметры (модули), описывающие точки в S_g и задающие комплексно-аналитическую структуру на S_g. Случай $g=1$ тривиален и в дальнейшем рассматриваться не будет, т. е. всюду предполагается, что $g\geqslant 2$.

3. Группа Шоттки $G(=\langle T_1, \ldots, T_g\rangle)$ рода g задается упорядоченным набором своих g стандартных порождающих. Не ограничивая общности, можно рассматривать в каждом классе эквивалентности лишь группы с нормированными порождающими $(T_1, \ldots, T_g)$, для которых $T_j(\infty)\neq\infty$, $j=1, \ldots, g$. Тогда каждой такой группе $G=\langle T_1, \ldots, T_g\rangle$ поставим в соответствие упорядоченный набор g троек комплексных чисел $(p_1, q_1, r_1e^{i\theta_1}, \ldots, p_g, q_g, r_ge^{i\theta_g})\in\mathbf{C}^{3g}$. По этому набору чисел упорядоченный набор g стандартных порождающих восстанавливается единственным образом по формуле:

$$T_j(z)=\frac{(q_j/r_je^{i\theta_j})z-(q_jp_j/r_je^{i\theta_j}+r_je^{i\theta_j})}{(1/r_je^{i\theta_j})z-(p_j/r_je^{i\theta_j})}$$

где p_j, q_j — центры изометрических окружностей (см. ([1])) для T_j и T_j^{-1}, r_j — их радиус, θ_j — вещественный параметр, $0\leqslant\theta_j<2\pi$, соответствующий повороту вокруг q_j, $j=1, \ldots, g$.

Обозначим через ξ_{j1}, ξ_{j2} неподвижные точки T_j, которые находятся по формулам

$$\xi_{j1}={}^1/_2(q_j+p_j+\sqrt{(q_j-p_j)^2-4r_j^2e^{2i\theta_j}}),$$
$$\xi_{j2}={}^1/_2(q_j+p_j-\sqrt{(q_j-p_j)^2-4r_j^2e^{2i\theta_j}}).$$

Группы Шоттки не могут представляться наборами вида X: $(p_1, q_1, r_1e^{i\theta_1}, \ldots, p_g, q_g, r_ge^{i\theta_g})\in\mathbf{C}^{3g}$ таким, что либо $r_{i_0}=0$, либо $\xi_{j_1k}=\xi_{i_1l}$, где i_0, i_1, $j_1=1,\ldots, g$, k, $l=1$, 2, и таковы, что если $i_1=j_1$, то $k\neq l$, и если $k=l$, то $i_1\neq j_1$; вида Y: $(p_1, q_1, r_1e^{i\theta_1},\ldots, p_g, q_g, r_ge^{i\theta_g})\in\mathbf{C}^{3g}$ такими, что либо $p_{i_0}=q_{i_0}$, либо $p_{j_1}=\xi_{j_1k}$, где i_0, $j_1=1,\ldots, g$, $k=1$, 2 (см. ([1], [3], [4])).

Пополним пространство $\mathbf{C}^3$ точками вида $[a, b]$, где a, $b\in\mathbf{C}$, $a\neq0$, при этом сходимость задается следующим образом: пусть $(p_n, q_n, r_ne^{i\theta_n})\in\mathbf{C}^3$ для любого n и $p_n\to\infty$, $q_n\to\infty$, $r_ne^{i\theta_n}\to\infty$ (в $\bar{\mathbf{C}}$), тогда $(p_n, q_n, r_ne^{i\theta_n})$ сходится к $[a, b]$, если $(-p_n/r_ne^{i\theta_n})\to1/a$, $q_n/r_ne^{i\theta_n}\to a$, $(p_nq_n/r_ne^{i\theta_n})+r_ne^{i\theta_n}\to b$ (в $\mathbf{C}$); $[a_n, b_n]$ сходится к $[a, b]$, если $a_n\to a$, $b_n\to b$ (в $\mathbf{C}$). Обозначим полученное топологическое пространство через $\widetilde{\mathbf{C}}^3$.

Класс эквивалентности $[G=\langle T_1,\ldots, T_g\rangle]$ задается любым своим представителем, например, группой $\langle T_1,\ldots, T_g\rangle$, а этой группе соответствует набор $(p_1, q_1, r_1e^{i\theta_1},\ldots, p_g, q_g, r_ge^{i\theta_g})\in\prod_{j=1}^{g}\widetilde{\mathbf{C}}_j^3\setminus(X\cup Y)$, где $\widetilde{\mathbf{C}}_j^3=\widetilde{\mathbf{C}}^3$, $j=1,\ldots, g$. Тогда существует дробно-линейное отображение B, зависящее только от выбора представителя $\langle T_1,\ldots, T_g\rangle$ в классе эквивалентности $[G]$, такое, что набор $T_1,\ldots, T_g$ переводится сопряжением в набор $BT_1B^{-1},\ldots, BT_gB^{-1}$, у которого три последние неподвижные точки (упорядоченного набора неподвижных точек для порождающих группы $\langle BT_1B^{-1},\ldots, BT_gB^{-1}\rangle$) равны 2, 0, 1 соответственно. Полученный набор g комплексных троек, соответствующий этому набору порождающих, причем одна и только одна из троек может быть заменена на элемент вида $[a, b]$, назовем *системой модулей для класса* $[G=\langle T_1,\ldots, T_g\rangle]$. Ясно, что системы модулей, соответствующие пространству S_g, образуют подмножество S_g^* в замыкании $\bar{Z}$ множества $Z=\{(p_1, q_1, r_1e^{i\theta_1},\ldots, p_g, q_g, r_ge^{i\theta_g})\in\mathbf{C}^{3g}\setminus(X\cup Y)\colon \xi_{g-1,2}=2, \xi_{g,1}=0, \xi_{g,2}=1\}$ в $\prod_{i=1}^{g}\mathbf{C}_j^3$. Обозначим через F множество тех классов эквивалентности из S_g, у которых после указанного выше сопряжения произвольно выбранного представителя в классе одна из первых $2g-3$ неподвижных точек равна ∞. Следовательно, множеству F соответствуют системы модулей, у которых одна и только одна из первых $g-1$ троек заменена на элемент вида $[a, b]$.

Система трех уравнений в определении множества Z эквивалентна системе

$$r_{g-1}e^{i\theta_{g-1}}=\sqrt{(p_{g-1}-2)(q_{g-1}-2)},\qquad q_g=1-p_g,$$
$$r_ge^{i\theta_g}=\sqrt{(p_g-1)p_g}.$$

Правые части этих уравнений отличны от нуля, так как набор, из которого взяты p_{g-1}, q_{g-1}, p_g, лежит вне Y. Поэтому каждая точка из $S_g\setminus F$ единственным образом описывается набором $(p_1, q_1, r_1e^{i\theta_1},\ldots, p_{g-2}, q_{g-2}, r_{g-2}e^{i\theta_{g-2}}, p_{g-1}, q_{g-1}, p_g)$, т. е. $3g-3$ независимыми параметрами, которые назовем *стандартными системами модулей*. Множество таких стандартных систем, соответствующих $S_g\setminus F$, обозначим через Q_g^*.

Теорема 1. *Пространство Шоттки S_g гомеоморфно открытому связному множеству S_g^* в $\bar{Z}$, причем Q_g^* открыто и связно в $\mathbf{C}^{3g-3}$.*

Теорема 2. *Стандартные системы модулей задают на $S_g\setminus F$ глобальную комплексно-аналитическую структуру размерности $3g-3$.*

В качестве примера применения введенных систем модулей укажем существенное подмножество A в $S_g^*\cap\mathbf{C}^{3g}$, определяемое следующим образом:

$$A=\{(z_{11}, z_{12}, z_{13}, \ldots, z_{g1}, z_{g2}, z_{g3})\in\mathbf{C}^{3g}\cap Z:$$
$$|z_{ik}-z_{jl}|>|z_{i3}|+|z_{j3}|,\quad i, j=1,\ldots, g,\ k,\ l=1,\ 2\}.$$

4. Граничными элементами пространства S_g будем называть пределы, последовательностей групп Шоттки рода g, не являющиеся группами Шоттки. В ([2]) описаны все типы граничных элементов для S_g, которые являются невырожденными группами. Если в пределе по k порождающим, $1\leqslant k\leqslant g$, последовательности групп Шоттки получаются константы, то полученный набор отображений назовем k-вырожденной группой, а соответствующий граничный элемент для S_g — вырожденным. Если $k=0$, то группа невырожденная.

Предложение. *Последовательность классов* $[G_n=\langle T_{1n},\ldots, T_{gn}\rangle]$ *сходится к вырожденному граничному элементу для* S_g *тогда и только тогда, когда соответствующая последовательность* $(p_{1n}, q_{1n}, r_{1n}e^{i\theta_{1n}}, \ldots, p_{gn}, q_{gn}, r_{gn}e^{i\theta_{gn}})\in\overline{Z}$ *удовлетворяет хотя бы одному из следующих условий: существует* j_0, $j_0=1,\ldots, g$, *такое, что*:

а) $r_{j_0n}\to 0$,

б) *только одна или две из трех координатных последовательностей* (p_{j_0n}), (q_{j_0n}), $(r_{j_0n}e^{i\theta_{j_0n}})$ *сходятся к* ∞ (*в* $\overline{\mathbf{C}}$),

в) $p_{j_0n}\to\infty$, $q_{j_0n}\to\infty$, $r_{j_0n}\to\infty$ (*в* $\overline{\mathbf{C}}$) *и* $(p_{j_0n}, q_{j_0n}, r_{j_0n}e^{i\theta_{j_0n}})$ *не сходится к элементу вида* $[a, b]$ $a, b\in\mathbf{C}$, $a\neq 0$,

г) $a_{j_0n}\to\infty$, *или* $a_{j_0n}\to 0$, *или* $b_{j_0n}\to\infty$ (*в* $\overline{\mathbf{C}}$),

д) $T_{j_0n}(z)$ *сходится к эллиптическому преобразованию* $S(z)$ *и для j-ой,* $j\neq j_0$, $j=1,\ldots, g$, *тройки модулей выполняются условия* а), *или* б), *или* в), *или* г).

5. С каждой группой Шоттки $G=\langle T_1,\ldots, T_g\rangle$ связан счетный набор групп, состоящий из тех же самых элементов, но отличающихся упорядоченными наборами стандартных порождающих. Любая группа из этого набора получается из $G=\langle T_1,\ldots, T_g\rangle$ некоторым ее автоморфизмом. Общий вид таких автоморфизмов найден в ([5]). Любой автоморфизм группы G переводит стандартные порождающие в стандартные ([2]). Тем самым определена группа автоморфизмов на S_g, а следовательно, и на S_g^*; обозначим последнюю группу через $\mathrm{Aut}\,S_g^*$. Заметим, что элементы $\mathrm{Aut}\,S_g^*$ не имеют неподвижных точек в S_g^*.

Теорема 3. *Группа* $\mathrm{Aut}\,S_g^*$ *собственно разрывна на* S_g^*.

Следовательно, существует точка $p\in S_g^*$ и окрестность $U(p)$ *в* S_g^* такая, что для любого $f\in\mathrm{Aut}\,S_g^*$, $f\neq 1$, $f(p)\cap\overline{U(p)}=\phi$. Тогда получаем взаимно однозначное соответствие между пространством классов эквивалентности групп Шоттки (неотмеченных) рода g и $S_g^*|\mathrm{Aut}\,S_g^*$.

В заключение автор выражает глубокую благодарность С. Л. Крушкалю за постановку задачи и постоянное внимание к работе, И. А. Волынцу и Б. Н. Апанасову за советы и замечания.

Новосибирский государственный
университет

Поступило
5 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. Р. Форд,* Автоморфные функции, М.– Л., 1936. [2] *V. Chuckrow,* Ann. Math., v. 88, № 1, 47 (1968). [3] *B. Maskit,* J. Anal. Math., v. 19, 227 (1967). [4] *J. Lehner,* Discontinuous Groups and Automorphic Functions, Am. Math. Soc., Providence, 1964. [5] *W. Magnus, A. Karras, D. Solitar,* Combinatorial Groups Theory, N. Y., 1966.