

Н. И. ЯЦКИН

**ВОПРОСЫ ПРОВОДИМОСТИ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ НА МНОГООБРАЗИЯХ К СПЕЦИАЛЬНОМУ ВИДУ**

(Представлено академиком Н. Н. Боголюбовым 25 VII 1974)

В классической теории дифференциальных уравнений известен ряд теорем, устанавливающих возможность приведения линейного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{dt} = \alpha(t)x, \quad (1)$$

где $\alpha(t)$ — $(n \times n)$ -матрица, к какому-либо специальному виду с помощью замены неизвестной $y = Q(t)x$ с определенными ограничениями на матрицу $Q(t)$. Назовем две из таких теорем, которые будут нас интересовать с точки зрения возможного их обобщения на случай многообразий.

А. Теорема Ляпунова — Флоке о приводимости к постоянным коэффициентам уравнения (1) с периодическими коэффициентами с помощью периодической замены (см., например, (1)).

Б. Теорема Перрона о приводимости уравнения (1) с комплексной матрицей к треугольному (с вещественной диагональю) виду с помощью унитарной замены (см., например, (2), стр. 263).

Обобщенная теорема Ляпунова — Флоке. Классическая теорема Ляпунова — Флоке была (для случая комплексных коэффициентов) обобщена в работах (3, 4) на уравнения вида

$$d\Phi = \alpha\Phi \quad (2)$$

с вполне интегрируемой I-формой α на торе (3) или на многообразии с конечно-порожденной абелевой фундаментальной группой. В работе (5), с использованием методов, развитых в (6), рассматривается уравнение, аналогичное (2), с вполне интегрируемой I-формой α со значениями в некоторой алгебре Ли и заданной на однородном пространстве односвязной группы Ли по дискретной подгруппе. Результат работы (3) попадает под общую схему работы (5).

Мы сформулируем две теоремы, обобщающие результаты (5) в двух разных направлениях.

Пусть M — гладкое связное многообразие; A — группа Ли с единицей 1, \mathfrak{a} — алгебра Ли группы A , $\mathcal{F}_A(M) = C^\infty(M, A)$, $\Lambda^1(M, \mathfrak{a})$ — пространство \mathfrak{a} -значных I-форм на M , $\mathcal{I}^1(M, \mathfrak{a}) = \{\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{a}) : d\alpha = \frac{1}{2}[\alpha, \alpha]\}$ — подмножество вполне интегрируемых форм. Группа $\mathcal{F}_A(M)$ действует на $\Lambda^1(M, \mathfrak{a})$:

$$\rho(Q)\alpha = DQ + (\text{Ad } Q)\alpha, \quad (3)$$

где $Q \in \mathcal{F}_A(M)$, $\alpha \in \Lambda^1(M, \mathfrak{a})$, а оператор

$$D: \mathcal{F}_A(M) \rightarrow \Lambda^1(M, \mathfrak{a})$$

определен формулой (см., например, (6, 7))

$$\langle (DQ)(x), X \rangle = (R_{Q(x)}^{-1})_{*, Q(x)}(Q_{*,x})(X),$$

где $x \in M$, $X \in T_x M$, $R_{Q(x)}$ обозначает правый сдвиг на $Q(x)$ в группе A , а звездочка — касательное отображение в указываемой точке. При этом $\mathcal{L}^1(M, \alpha)$ инвариантно относительно действия (3). Формы, принадлежащие одной орбите действия (3), называются эквивалентными. Известно (см., например, (6), (8)), что две вполне интегрируемые формы эквивалентны тогда и только тогда, когда их гомоморфизмы монодромии сопряжены. Пусть теперь (M, ∇) — многообразие линейной связности. Обозначим

$$\Lambda_{\text{const}}^1(M, \nabla; \alpha) = \{\alpha \in \Lambda^1(M, \alpha) : \nabla \alpha = 0\}$$

пространство постоянных (самопараллельных) форм. Здесь $\nabla \alpha$ — тензорное поле, заданное формулой $(\nabla \alpha)(X, Y) = Y \langle \alpha, X \rangle - \langle \alpha, \nabla_Y X \rangle$, где X, Y — векторные поля на M . Обозначим $\Lambda_{\text{red}}^1(M, \nabla; \alpha)$ пространство приводимых, т. е. эквивалентных постоянных форм. Кроме того введем обозначение

$$\mathcal{L}_{\text{const}(\text{red})}^1(M, \nabla; \alpha) = \Lambda_{\text{const}(\text{red})}^1(M, \nabla; \alpha) \cap \mathcal{L}^1(M, \alpha).$$

Связность ∇ на M однозначно поднимается до $\pi_1(M)$ -инвариантной связности $\tilde{\nabla}$ на универсальном накрывающем многообразии $\pi: \tilde{M} \rightarrow M$. Отметим точку $p \in \tilde{M}$. Предположим, что (M, ∇) (а значит, и $(\tilde{M}, \tilde{\nabla})$) полно, и пусть $\text{Exp}: T_p \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ — экспоненциальное отображение связности $\tilde{\nabla}$. Рассмотрим пространство $L(T_p \tilde{M}, \alpha)$ линейных отображений из $T_p(\tilde{M})$ в α . На некотором подпространстве $L_0(T_p \tilde{M}, \alpha)$ этого пространства определен оператор

$$S: L_0(T_p \tilde{M}, \alpha) \rightarrow \Lambda_{\text{const}}^1(\tilde{M}, \tilde{\nabla}, \alpha)$$

продолжения до постоянной формы на \tilde{M} , который можно задать в терминах параллельного переноса, соответствующего связности $\tilde{\nabla}$. На $L_0(T_p \tilde{M}, \alpha)$ действует группа $\pi_1(M): \gamma \cdot \alpha_0 = S^{-1} \gamma^* S \alpha_0$, $\alpha_0 \in L_0(T_p \tilde{M}, \alpha)$, $\gamma \in \pi_1(M)$, где справа γ понимается как диффеоморфизм \tilde{M} . Обозначим $L_{\text{inv}}(T_p \tilde{M}, \alpha)$ подпространство инвариантов этого действия.

Определение 1. Гладкое отображение $\Phi: \tilde{M} \rightarrow A$ назовем «гомоморфизмом», если выполнены следующие условия:

- 1) $\Phi(p) = 1$;
- 2) коммутативна диаграмма

$$\begin{array}{ccc} T_p \tilde{M} & \xrightarrow{\Phi_{*, p}} & \alpha \\ \text{Exp} \downarrow & & \downarrow \text{exp} \\ \tilde{M} & \xrightarrow{\Phi} & A \end{array}$$

- 3) $\Phi_{*, p} \in L_{\text{inv}}(T_p \tilde{M}, \alpha)$;
- 4) $\Phi_{*, p}(\tilde{T}(X, Y)) = [\Phi_{*, p}(X), \Phi_{*, p}(Y)]$; $X, Y \in T_p \tilde{M}$, где \tilde{T} — тензор кручения связности $\tilde{\nabla}$.

Определение 2. Пусть $f: \pi_1(M) \rightarrow A$ — некоторый гомоморфизм. Будем говорить, что f продолжается до «гомоморфизма» $\Phi: \tilde{M} \rightarrow A$, если

- 5) $\Phi(x \cdot \gamma) = \Phi(x) f(\gamma)$, где через $x \cdot \gamma$ обозначено (правое) действие $\gamma \in \pi_1(M)$ на $x \in \tilde{M}$.

Теорема 1. Пусть (M, ∇) — полное многообразие линейной связности, $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \alpha)$. Тогда, если $\alpha \in \mathcal{L}_{\text{red}}^1(M, \nabla, \alpha)$, то ее гомоморфизм монодромии продолжается до «гомоморфизма» $\Phi: \tilde{M} \rightarrow A$. При дополнительных ограничениях на многообразие:

- 6) отображение $\text{Exp}: T_p \tilde{M} \rightarrow \tilde{M}$ сюръективно;
- 7) $\nabla \tilde{T} = 0$

справедливо обратное утверждение.

Замечание 1. Для римановой связности $\tilde{T} = 0$ и 6) тоже всегда выполнено ((9), стр. 72), а 4) сводится к условию коммутативности

$$4') [\Phi_{*,\tau}(X), \Phi_{*,\rho}(Y)] = 0; \quad X, Y \in T_p M.$$

Замечание 2. Для многообразия абсолютного параллелизма $L_{\text{inv}}(T_p \bar{M}, \alpha) = L(T_p \bar{M}, \alpha)$ и условие 3) пропадает. Условие 7) есть условие постоянства структурной функции.

Для параллелизованного многообразия M с произвольной структурной функцией мы сформулируем теорему о приводимости к некоторому другому специальному виду. Пусть $G = \text{Aut}(\bar{M})$ — группа Ли⁽¹⁰⁾ автоморфизмов абсолютного параллелизма \bar{M} , соответствующего заданному параллелизму M . Очевидно, $\pi_1(M)$ вложена в G . Назовем форму α на M G -инвариантной, если форма $\bar{\alpha} = \pi^* \alpha$ на \bar{M} G -инвариантна. Всякая форма с постоянными коэффициентами G -инвариантна. Обратное, вообще говоря, не верно.

Теорема 2. Пусть M — многообразиие абсолютного параллелизма, $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \alpha)$. Тогда α эквивалентна G -инвариантной форме, если и только если:

8) гомоморфизм монодромии формы α продолжается до гомоморфизма $\Psi: G \rightarrow A$, где $G = \text{Aut}(\bar{M})$;

9) существует гладкое G -отображение $\Phi: \bar{M} \rightarrow A$ (т.е. $\Phi(x.g) = \Phi(x)\Psi(g)$ и $\Phi(p) = 1$).

Замечание. В случае транзитивности G на \bar{M} получаем теорему о приводимости из (8).

Обобщенная теорема Перрона. Пусть M — снова произвольное многообразие, $A = \text{Gh}(n, \mathbb{C})$. Две формы α, β назовем унитарно эквивалентными, если $\beta = \rho(Q)\alpha$, $Q \in C^\infty(M, U(n))$.

Теорема 3. Пусть $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$. Тогда α унитарно эквивалентна форме со значениями в алгебре Ли треугольных с вещественной диагональю матриц тогда и только тогда, когда ее гомоморфизм монодромии сопряжен некоторому гомоморфизму $\pi_1(M)$ в группу треугольных с вещественной положительной диагональю матриц.

Следствие. Если $\pi_1(M)$ абелева и имеет конечное число образующих $\gamma_1, \dots, \gamma_m$, то форма $\alpha \in \mathcal{L}^1(M, \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}))$ приводима к треугольному с вещественной диагональю виду тогда и только тогда, когда операторы монодромии вдоль γ_i все имеют вещественный положительный спектр.

Автор благодарен С. Г. Крейну за постоянное внимание к его работе и полезные обсуждения.

Воронежский лесотехнический институт

Поступило
27 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. А. Якубович, В. М. Старжинский, Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения, «Наука», 1972. ² Б. А. Былов, Р. Э. Виноград и др. Теория показателей Ляпунова и ее приложения к вопросам устойчивости, «Наука», 1966. ³ R. Gerard, Ann. Scuola Norm. Super Pisa, Sci. fis. e mat., v. 20, 3, 537 (1966). ⁴ R. Gerard, G. Reeb, ibid., v. 21, 1, 93 (1967). ⁵ А. Л. Онищик, Матем. заметки, т. 9, 4, 365 (1971). ⁶ А. Л. Онищик, Тр. Московск. общ. т. 17, 45 (1967). ⁷ E. Fedida, C. R., v. 272, 15, A999 (1971). ⁸ Asada Akira, J. Fac. Sci. Shinshu Univ., v. 2, 2, 109 (1967). ⁹ С. Хелгасон, Дифференциальная геометрия и симметрические пространства, М., 1964. ¹⁰ S. Kobayashi, Transformation Groups in Differential Geometry (Ergeb. Math., 70), Berlin, 1972, VIII.