Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 519.48 *МАТЕМАТИКА*

В. Б. ГИСИН

# ОБ ОДНОМ КЛАССЕ БИКАТЕГОРИЙ

*(Представлено академиком П. С. Новиковым 14 V 1974)*

В этой заметке описывается подкласс $G$ класса $F'$ бикатегорий, рассмотренного Д. А. Райковым в [8], образованный аддитивными категориями, и класс точных $G$-бикатегорий.

Класс $G$ содержит все бикатегории $(\mathfrak{S}, \mathrm{Cok}, M)$, где $\mathfrak{S}$ — локально-малая (л.м.) полуабелева категория [7], а Cok и $M$ — соответственно классы всех коядер и мономорфизмов в $\mathfrak{S}$. В класс $G$ (или дуальный к нему класс $G^*$) входят такие категории (с очевидной бикатегорной структурой) как категория всех проективных модулей над наследственным кольцом, категория всех плоских модулей над кольцом, имеющим слабую глобальную размерность 0 или 1, и т. п. Вообще, если $\mathfrak{C}$ — (полная) подкатегория л.м. абелевой категории $\mathfrak{A}$, замкнутая относительно произведений и подобъектов, то $(\mathfrak{C}, \mathfrak{C}\cap\mathrm{Cok}, \mathfrak{C}\cap M)$ — (точная) $G$-бикатегория. Оказывается, что класс (точных) $G$-бикатегорий этим и исчерпывается. Неточные $G$ (или $G^*$-)-бикатегории часто встречаются в коммутативной топологической алгебре (см., например, [2]).

Основным результатом настоящей работы является построение функтора вложения $G$-бикатегории в л.м. абелеву категорию. Этот функтор в определяемом ниже смысле точен и в случае точной $G$-бикатегории вполне унивалентен, что отличает его от функторов вложения аддитивных категорий в абелевы у Фрейда [9] и Эйдельмана [1], где одно из этих свойств может отсутствовать. Описывается также класс $H$ категорий с инволюцией [6], связанный с классом $G$, подобно тому как связан класс бикатегорий $F'$ с классом категорий соответствий $C$ в [8].

I. Класс $G$ образуют все бикатегории $(\mathfrak{S}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$, удовлетворяющие аксиомам $G1$—$G3$:

$G1$. Категория $\mathfrak{S}$ аддитивна и каждый морфизм в ней обладает ядром.

$G2$. $\mathfrak{S}$ — локально $\mathfrak{M}$-малая категория, т. е. класс $\mathfrak{M}$-подобъектов каждого объекта есть множество.

$G3$. Если квадрат

$$\begin{tikzcd} \cdot \arrow[r] \arrow[d, "\zeta"'] & \cdot \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \cdot \arrow[r] & \cdot \end{tikzcd} \qquad (*)$$

декартов и $\varepsilon\in\mathfrak{E}$, то $\zeta\in\mathfrak{E}$.

$G$-бикатегория $(\mathfrak{S}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$ называется точной, если всякий моно из $\mathfrak{E}$ есть изо. В этом случае $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M}) = (\mathrm{Cok}, M)$.

Пусть $(\mathfrak{S}_i, \mathfrak{E}_i, \mathfrak{M}_i)\in G$, $i=1, 2$. Функтор $\Phi\colon \mathfrak{S}_1\to\mathfrak{S}_2$ назовем точным, если $\Phi(\mathfrak{E}_1)\subset\mathfrak{E}_2$ и $\Phi(\ker\alpha)=\ker\Phi(\alpha)$ для любого морфизма $\alpha$. Если $\mathfrak{S}_2$ абелева, то назовем $\Phi$ точным справа, если из $\varepsilon\in\mathfrak{E}$ и $\mu=\ker\varepsilon$ следует, что $\Phi(\varepsilon)=\mathrm{cok}\,\Phi(\mu)$.

Класс $H$ образуют все категории с инволюцией $\mathfrak{K}$, удовлетворяющие аксиомам $H0$—$H7$ (обозначения см. в [6] или [8]). Морфизм $f$ из $\mathfrak{K}$ называется собственным, если $ff^{\#}\subset 1$ и $f^{\#}f\supset 1$. Собственные морфизмы образуют в $\mathfrak{K}$ полную подкатегорию $P(\mathfrak{K})$.

$H0$. В $\mathfrak{K}$ имеется квазинулевой объект 0.

$H1$ $(=C1$ [8]$)$. а) $Df=\Omega\Rightarrow f^{\#}f\supset 1$; б) $Jf=\omega\Rightarrow ff^{\#}\subset 1$.

$H2$ ($\Leftarrow C3$ (8)). $Jf=Jg$, $Df=\Omega$, $f\subset g\Rightarrow f=g$.

$H3$ ($\Leftarrow K2b$ (6)). $Jf\subset Jg$, $Bf=\Omega\Rightarrow ff^{\#}g=g$.

$H4$ ($\Leftarrow K3a$ (6)). Каждый морфизм $u\in\mathfrak{K}(0, X)$ представим в виде $B\mu$, где $\mu$ — собственный морфизм с $K\mu=\omega$.

Укажем несколько предложений, вытекающих из $H0$—$H4$.

$\Pi 1$. Если $Df=\Omega$ и $Dg=\Omega$, то:

а) $ff^{\#}f=f$, $f^{\#}Bf=Df$, $f^{\#}Jf=Kf$;

б) $Jf\subset Kg\Rightarrow J(gf)=Jg$;

в) $gf=(Jg)\Omega^{\#}\Leftrightarrow Bf\subset Kg$.

$\Pi 2$. $\mathfrak{P}=P(\mathfrak{K})$ — категория с нулевым объектом 0.

$\Pi 3$ ($=F1$ (8)). Каждый морфизм в $\mathfrak{P}$ обладает ядром, каждое ядро обладает коядром.

$\Pi 4$ ($=F2$ (8)). В каноническом разложении $\alpha=\mu\operatorname{cok}\ker\alpha$ $\mu$ — собственный морфизм и $K\mu=\omega$.

$\Pi 5$ а) $\varphi$ — коядро в $\mathfrak{B}\Leftrightarrow B\varphi=\Omega$;

б) $\mu=\ker\alpha\Leftrightarrow K\mu=\omega$, $B\mu=K\alpha$ для любых $\mu$, $\alpha\in\mathfrak{P}$.

Последовательность $\ldots\xrightarrow{\alpha}A\xrightarrow{\beta}\ldots$ будем, следуя (8), называть квазиточной в $A$, если $B\alpha=K\beta$, и квазиточной, если она точна в каждой внутренней вершине.

$\Pi 6$ ($=F4$ (8)). В коммутативной диаграмме в $\mathfrak{P}$ с точными строками

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, equal] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, "\iota"] & \cdot \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ 0 \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & \cdot \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

$\iota$ — изоморфизм.

Если в $\mathfrak{P}$ точны последовательности

$$0\to L\xrightarrow{\lambda}X\xrightarrow{\varphi}E\to 0,\qquad 0\to M\xrightarrow{\mu}X\xrightarrow{\psi}F\to 0$$

и $\varphi\mu$ — изо, то и $\psi\lambda$ — изо.

$H5$. В $\mathfrak{K}(X, Y)$ при любых $X$ и $Y$ каждая пара морфизмов $(f, g)$ обладает верхней гранью $f\cup g$.

$H6$ (ср. $C5$ (8)). $fg_1\cup fg_2\subset f(f^{\#}fg_1\cup g_2)$ для любых $X$, $Y$, $Z$, $f\in\mathfrak{K}(X, Y)$ и $g_1$, $g_2\in\mathfrak{K}(Y, Z)$.

$H7$ (ср. $K6б$ (6)). Для каждой пары объектов $(A_1, A_2)$ существуют объект $S$ и морфизмы $\varkappa_i$: $A_i\to S$, $i=1, 2$, из $\mathfrak{P}$ такие, что $\varkappa_1^{\#}\varkappa_2=\omega\omega^{\#}$ и $B\varkappa_1\cup B\varkappa_2=\Omega$.

$S$ есть сумма $A_1+A_2$ в $\mathfrak{P}$ с инъекциями $\varkappa_1$, $\varkappa_2$.

$\Pi 9$. Категория $\mathfrak{P}$ аддитивна. Если $B\varepsilon=\Omega$ и квадрат (*) декартов в $\mathfrak{P}$, то $B\zeta=\Omega$.

Т е о р е м а 1. ($\mathfrak{P}$, Cok, $M$) — *точная $G$-бикатегория.*

Для каждой $G$-бикатегории ($\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{M}$) так же, как в (8), строим категорию соответствий $\mathfrak{V}$. Будем ее обозначать $V(\mathfrak{G}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$, или $V(\mathfrak{G})$, если $(\mathfrak{E}, \mathfrak{M})=(\mathrm{Cok}, M)$.

Т е о р е м а 2 (ср. с теоремой 5 из (8)). $\mathfrak{V}=V(\mathfrak{G}, \mathfrak{E}, \mathfrak{M})$ *есть категория с инволюцией класса H. Функтор графического вложения* $\mathfrak{G}\to\mathfrak{V}$ *индуцирует точный унивалентный функтор* $\Gamma$: $\mathfrak{G}\to P(\mathfrak{V})$ *такой, что* $\Gamma(\alpha)$ — *изо тогда и только тогда, когда* $\alpha\in\mathfrak{E}\cap M$.

Заметим, что $P(\mathfrak{V})$ эквивалентна категории правых частных $\mathfrak{G}([\mathfrak{E}\cap M]^{-1})$ в смысле Габриэля и Цисмана (3).

Т е о р е м а 3 (ср. с теоремой 3 из (8)). *Пусть* $\mathfrak{K}$, $\mathfrak{K}'\in H$. *Каждый J-функтор* $T$: $\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}'$ *индуцирует точный функтор* $t$: $P(\mathfrak{K})\to P(\mathfrak{K}')$ *и каждый точный функтор* $t$: $P(\mathfrak{K})\to P(\mathfrak{K}')$ *единственным образом продолжается до J-функтора* $T$: $\mathfrak{K}\to\mathfrak{K}'$.

II. Пусть теперь $\mathfrak{K}$ — категория с инволюцией, удовлетворяющая аксиомам $H0$—$H4$ и условию (E):

Каждый морфизм $u\in\mathfrak{K}(0, X)$ представим в виде $Jf$ для некоторого морфизма $f$ с $Bf=\Omega$.

Условие (E) следует из аксиом $H0$—$H7$. Построим точную категорию $\mathfrak{A}=\mathrm{A}(\mathfrak{K})$. За $\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$ примем класс собственных морфизмов $\mu$ из $\mathfrak{K}$ с $K\mu=\omega$. Для каждой пары $\lambda$, $\mu\in\mathrm{Ob}\mathfrak{A}$ положим $\mathfrak{A}(\lambda,\mu)=\{(f,\lambda,\mu): f\in\mathfrak{K},\ Jf=B\mu,\ Df=\Omega,\ B\lambda\subset Kf\}$.

Композицию в $\mathfrak{A}$ определим формулой $(g,\mu,\sigma)(f,\lambda,\mu)=(gf,\lambda,\sigma)$. Пусть $\mu\in\mathrm{Ob}\mathfrak{A}$ и морфизм $f$ выбран на основании (E) так, что $Bf=\Omega$ и $Jf=B\mu$; тогда $1_\mu=f^{\#}f$ не зависит от выбора $f$ и $\mathcal{U}_\mu=(1_\mu,\mu,\mu)$ — единица объекта $\mu$ в $\mathfrak{A}$.

Теорема 4. *Категория $\mathfrak{A}$ точна и локально-мала.*

Доказательство. Пусть $\mu$, $\lambda\in\mathrm{Ob}\mathfrak{A}$ и $\mathcal{F}=(f,\lambda,\mu)\in\mathfrak{A}(\lambda,\mu)$. Опираясь на $H4$, выберем, $\nu$, $\xi\in\mathrm{Ob}\mathfrak{A}$ так, чтобы $B\nu=Kf$ и $B\xi=Bf$. Тогда $(1_\xi,\mu,\xi)=\mathrm{cok}\,\mathcal{F}\in\mathfrak{A}(\mu,\xi)$ и $(\nu 1_\nu,\gamma,\lambda)=\ker\mathcal{F}\in\mathfrak{A}(\gamma,\lambda)$, где $\gamma=\nu^{\#}\lambda\in\mathrm{Ob}\mathfrak{A}$. Для $\delta=\xi^{\#}\mu\in\mathrm{Ob}\,\mathfrak{A}$ имеем $(\xi 1_\delta,\delta,\mu)=\ker\mathrm{cok}\,\mathcal{F}$, $(1_\nu,\lambda,\nu)=\mathrm{cok}\ker\mathcal{F}$ и $\mathcal{F}=\ker\mathrm{cok}\,\mathcal{F}(\xi^{\#}f,\nu,\delta)\mathrm{cok}\ker\mathcal{F}$, причем $(\xi^{\#}f,\nu,\delta)\in\mathfrak{A}(\nu,\delta)$ — изоморфизм в $\mathfrak{A}$.

Для морфизма $\alpha\colon X\to Y$ из $\mathfrak{P}=P(\mathfrak{K})$ положим $\tilde{\Lambda}(\alpha)=(\alpha,\omega_X,\omega_Y)\in\mathfrak{A}(\omega_X,\omega_Y)$.

Теорема 5. *$\tilde{\Lambda}$ индуцирует вполне унивалентный функтор $\Lambda\colon\mathfrak{P}\to\mathfrak{A}$.*

Теорема 6. *Если $\mathfrak{K}\in H$, то категория $\mathfrak{A}=A(\mathfrak{K})$ абелева и функтор $\Lambda\colon\mathfrak{P}\to\mathfrak{A}$ вполне унивалентен и точен.*

Таким образом, для любой бикатегории $(\mathfrak{G},\mathfrak{E},\mathfrak{M})$ имеем точный функтор $\Delta\colon\mathfrak{G}\to\mathfrak{A}$, где $\mathfrak{A}=A(V(\mathfrak{G},\mathfrak{E},\mathfrak{M}))$, равный композиции $\mathfrak{G}\to P(V(\mathfrak{G},\mathfrak{E},\mathfrak{M}))\to\mathfrak{A}$. $\Delta$ вполне унивалентен, если и только если $(\mathfrak{G},\mathfrak{E},\mathfrak{M})$ — точная $G$-бикатегория. Отсюда, класс (точных) $G$-бикатегорий совпадает с классом (полных) подкатегорий л.м. абелевых категорий, замкнутых относительно конечных сумм и подобъектов, при наделении их канонической бикатегорной структурой.

Если $\mathfrak{F}$ абелева категория, то категория $A(V(\mathfrak{F}))$ эквивалентна $\mathfrak{F}$.

Теорема 7. *Для любого точного справа функтора $\Phi\colon\mathfrak{G}\to\mathfrak{F}$, где $(\mathfrak{G},\mathfrak{E},\mathfrak{M})\in G$, а категория $\mathfrak{F}$ абелева, существует и единствен точный справа функтор $\Psi\colon A(V(\mathfrak{G},\mathfrak{E},\mathfrak{M}))\to\mathfrak{F}$, для которого $\Psi\Delta=\Phi$.*

Теорема 8. *Если $(\mathfrak{G}_i,\mathfrak{E}_i,\mathfrak{M}_i)\in G$, $i=1, 2$, и функтор $\Phi\colon\mathfrak{G}_1\to\mathfrak{G}_2$ точен, то существует и единствен точный функтор $\Psi\colon A(V(\mathfrak{G}_1,\mathfrak{E}_1,\mathfrak{M}_1))\to A(V(\mathfrak{G}_2,\mathfrak{E}_2,\mathfrak{M}_2)$, для которого $\Psi\Lambda_1=\Lambda_2\Phi$.*

Теорема 8 показывает, что «категория» л.м. абелевых категорий рефлексивна в «категории» $G$-бикатегорий и точных функторов.

Укажем в заключение два приложения, основанные на следующем утверждении.

Теорема 9. *Пусть $\mathfrak{S}$ — л.м. полуабелева категория и $\mathfrak{A}=(A(V(\mathfrak{S}))$, тогда точный слева функтор $\Delta\colon\mathfrak{S}\to\mathfrak{A}$ обладает тем свойством, что последовательность $0\to A\to B\to C\to 0$ точна в $\mathfrak{S}$, если и только если последовательность $0\to\Delta(A)\to\Delta(B)\to\Delta(C)\to 0$ точна в $\mathfrak{A}$.*

Если теперь $\mathfrak{U}$ — полуабелева категория с достаточным количеством инъективных объектов, $\Psi\colon\mathfrak{U}\to\mathfrak{S}$ — точный слева функтор и последовательность

$$0\to X\to Y\to Z\to 0 \tag{1}$$

точна в $\mathfrak{U}$, то так же, как в [5], имеем точную последовательность в $\mathfrak{A}$ для производных функторов функтора $\Phi=\Delta\Psi\colon\mathfrak{U}\to\mathfrak{A}$:

$$0\to\Phi(X)\to\Phi(Y)\to\Phi(Z)\to\Phi^1(X)\to\Phi^1(Y)\to\ldots$$

Для точности последовательности

$$0\to\Psi(X)\to\Psi(Y)\to\Psi(Z)\to 0 \tag{2}$$

в $\mathfrak{S}$ достаточно (и необходимо при $\Phi^1(Y)=0$), чтобы $\Phi^1(X)=0$.

Пример 1. $\mathfrak{U}=\overleftarrow{TC}$ — категория счетных обратных спектров над категорией $TC$ локально-выпуклых пространств (л.в.п.) [4], $\mathfrak{S}=TC$, $\Psi:\mathfrak{U}\to$

$\to\mathfrak{S}$ — функтор проективного предела. Чтобы для точной последовательности обратных спектров (1) была точна последовательность (2) их пределов, достаточно, чтобы $\Phi^1(X)=0$. Заметим, что $\mathrm{Pro}^1(X)=0$ ([4]) следует из $\Phi^1(X)=0$.

Пример 2. $\mathfrak{U}=TC$, $\mathfrak{S}$ — категория векторных пространств с борнологией (в.п.б.), $\Psi$: $\mathfrak{U}\to\mathfrak{S}$ — функтор, ставящий в соответствие л.в.п. $X$ в.п.б. $\Psi(X)$, где $\Psi(X)$ и $X$ совпадают как векторные пространства, а борнология в $\Psi(X)$ образована всеми ограниченными множествами в л.в.п. $X$. Для $X\in TC$ из $\Phi^1(X)=0$ следует, что для любой точной последовательности (1) в $TC$ всякое ограниченное множество в $Z$ есть образ ограниченного множества из $Y$.

Выражаю глубокую благодарность Д. А. Райкову за постоянное внимание к работе.

Московский государственный педагогический институт
им. В. И. Ленина

Поступило
27 IV 1974

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *M. Adelman*, J. Pure Appl. Algebra, v. 3, 103 (1973). [2] *Д. В. Ботнару, В. Б. Гисин*, Изв. АН МолдССР, т. 1, 5 (1973). [3] *П. Габриэль, М. Цисман*, Категории частных и теория гомотопий, М., 1971. [4] *В. П. Паламодов*, Матем. сб., т. 75, (117), № 4, 568 (1968). [5] *В. П. Паламодов*, УМН, т. 26, 1 (157), 3 (1971). [6] *Д. Пуппе*, Сб. пер. Математика, т. 8, 6, 109 (1964). [7] *Д. А. Райков*, ДАН, т. 188, № 5, 1006 (1969). [8] *Д. А. Райков*, ДАН, т. 205, № 6, 1300 (1972). [9] *J. P. Freyd*, Proc. Conf. on Categorical Algebra (La Jolla), Berlin, 1965.