Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 5

УДК 517.946.81

МАТЕМАТИКА

Н. К. БЛИЕВ

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

(Представлено академиком И. Н. Векуа 31 VII 1974)

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$Lw \equiv \frac{\partial w}{\partial \bar z} + A(z)w + B(z)\bar w, \quad \frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \tag{1}$$

являющееся комплексной записью эллиптической системы вещественных уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} + a(x, y)u + b(x, y)v = f(x, y),$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + c(x, y)u + d(x, y)v = g(x, y).$$

Теория уравнений вида (1) с коэффициентами из L_p, $p>2$, построена в работах И. Н. Векуа и изложена в его книге ([1]). Уравнения вида (1) изучались также и в работах Н. Теодореску ([2]) и Л. Берса ([3]).

Ниже мы установим некоторые основные свойства решений уравнения (1) с коэффициентами $A(z)$, $B(z)$, $F(z)$, принадлежащими классам О. В. Бесова $B_{p,1}^{\alpha}(G)$, $1<p<2$, $\alpha=(2-p)/p$, G — ограниченная область с границей Γ, допускающей производную, непрерывную по Гёльдеру с показателем α', $0<\alpha<\alpha'<1$. Заметим ([4]), что $B_{p,1}^{\alpha}(G) \subset L_2(G)$ для $1<p<2$, $\alpha=(2-p)/p$, но $B_{p,1}^{\alpha}(G) \not\subset L_{p'}(G)$ при любом $p'>2$.

Для рассматриваемых ниже классов справедливы следующие предложения:

1°. *Имеют место соотношения* $B_{p,1}^{1+\alpha}(G) \subset B_{p',1}^{\alpha}(G) \subset C(G)$ *при* $1<p<2$, $\alpha=(2-p)/p$, $p'=2/\alpha$ *с соответствующими оценками норм.*

Это следует из теорем вложения ([5, 6]) для B-классов.

2°. *Если* $f(z)$ *и* $g(z)$ — *произвольные функции соответственно из классов* $B_{p,1}^{\alpha}(G)$ *и* $B_{p',1}^{\alpha}(G)$, $1<p<2$, $\alpha=(2-p)/p$, $p'=2/\alpha$, *то* $f(z)\cdot g(z) \in B_{p,1}^{\alpha}(G)$ *и* $\|fg\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)} \leqslant K\|f\|_{B_{p,1}^{\alpha}(G)} \cdot \|g\|_{B_{p',1}^{\alpha}(G)}$, *где* K — *положительная постоянная, не зависящая от* f *и* g.

Учитывая замечание и предложение 1°, нетрудно получить неравенства

$$\|fg\|_{L_p(G)} \leqslant \|f\|_{L_2(G)} \cdot \|g\|_{L_{p'}(G)},$$
$$\|\Delta_n(fg)\|_{L_p(G)} \leqslant \|f\|_{L_2(G)} \cdot \|\Delta_n g\|_{L_{p'}(G)} + \sup_G |g| \cdot \|\Delta_n f\|_{L_p(G)}, \tag{2}$$

из которых следует справедливость предложения. Как легко видеть, предложение — окончательное в терминах рассматриваемых классов, т. е. например, из того, что $fg \in B^{\alpha}_{p,1}(G)$ для любой функции $f \in B^{\alpha}_{p,1}(G)$, $1<p<2$, $\alpha=(2-p)/p$, следует, что $g \in B^{\alpha}_{p',1}\ (G)$, $p'=2/\alpha$.

3°. *Для произвольных функций* $f(z)$ *и* $g(z)$ *из* $B^{\alpha}_{p',1}(G)$ $\alpha=(2-p)/p$, $p'=2/\alpha$, $1<p<2$, *имеет место* $fg \in B^{\alpha}_{p',1}(G)$, *и обратно, из того, что* $fg \in B^{\alpha}_{p',1}(G)$ *для любой функции* $f \in B^{\alpha}_{p',1}(G)$, *следует, что* $g \in B^{\alpha}_{p',1}(G)$.

4°. В предложениях 2°, 3° всюду $B^{\alpha}_{p',1}(G)$ можно заменить на $B^{1+\alpha}_{p,1}(G)$. В этом нетрудно убедиться, учитывая предложение 1°.

Будем говорить, что функция $w(z)$ удовлетворяет уравнению (1) в окрестности точки z_0, если в некоторой окрестности G_0 этой точки существует $\partial w/\partial \bar{z} \in B^{\alpha}_{p,1}(G_0)$ и $Lw=F$ почти везде в G_0. Если $w(z)$ удовлетворяет уравнению $Lw=F$ в окрестности каждой точки области G, исключая, быть может, точки некоторого дискретного относительно G множества G_w^*, то будем говорить, что $w(z)$ является обобщенным решением уравнения (1) в области G.

Множество G_w^*, которое содержит лишь изолированные точки, вообще говоря, зависит от выбора $w(z)$. Если G_w^* — пустое множество, то обобщенное решение $w(z)$ будем называть регулярным решением уравнения (1) в области G.

Если $w(z)$ — регулярное решение уравнения (1), то будем иметь [1]

$$w(z)-Pw=\Phi(z)+TF, \tag{3}$$

где $\Phi(z)$ — голоморфная в G функция,

$$Tf=-\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta, \quad Pf=-T(Af+B\bar{f}).$$

Свойства оператора Tf в классах $H_p^{\alpha'}(G)$ и $B^{\alpha}_{p,1}(G)$ исследованы в работах [7, 8] автора. Таким образом, всякое регулярное решение уравнения (1) удовлетворяет интегральному уравнению (3), причем $\Phi(z)$ однозначно определяется по заданному решению $w(z)$ уравнения $Lw=F$. Имеет место и обратное предложение: если для некоторой голоморфной в G функции $\Phi(z)$ интегральное уравнение (3) имеет своим решением функцию $w(z)$, для которой $Aw+B\bar{w} \in B^{\alpha}_{p,1}(G)$, то она будет удовлетворять также уравнению (1).

В силу предложений 2°, 4° и теоремы 1 из [8] следует, что в интегральном уравнении (3) Pw является линейным ограниченным оператором, переводящим $B^{1+\alpha}_{p,1}(G)$ в себя.

Основная лемма. *Пусть* $w(z)$ — *обобщенное решение однородного уравнения* $Lw=0$ *и*

$$g(z)=\begin{cases} A(z)+B(z)\dfrac{\overline{w(z)}}{w(z)}, & \text{если } w(z)\neq 0,\ z\in G,\\ A(z)+B(z), & \text{если } w(z)=0,\ z\in G. \end{cases} \tag{4}$$

При этих условиях функция

$$\Phi(z)=w(z)\cdot e^{-\omega(z)}, \tag{5}$$

где

$$\omega(z)=\frac{1}{\pi}\iint\limits_G \frac{g(\zeta)}{\zeta-z}\,d\xi\,d\eta\equiv -Tg,$$

является однозначной аналитической функцией в G, *которая может иметь в* G *дискретное множество изолированных особых точек — полюсы и существенно особые точки.*

Доказательство. По определению обобщенного решения из теоремы 3 работы ([8]) и предложения 1^0 следует, что $w(z)\in B^{1+\alpha}_{p,1}\subset B^{\alpha}_{p',1}\subset C(G)$, $1<p<2$, $\alpha=(2-p)/p$, $p'=2/\alpha$. При этом ограниченная в G функция $\overline{w}/w=e^{-2i\varphi}$, следовательно, и $e^{i\varphi}$, $\varphi=\arg w(z)$, будет непрерывной в G всюду, за исключением нулей функции $w(z)$ (см. ([9])). С другой стороны, так как $w(z)=|w|e^{i\varphi}\in B^{\alpha}_{p',1}(G)$, то легко видеть, что и $|w|\in B^{\alpha}_{p',1}(G)$. Тогда, учитывая предложение 3^0, имеем $e^{i\varphi}\in B^{\alpha}_{p'1}(G)$ и, следовательно, $e^{-2i\varphi}\in$ $\in B^{\alpha}_{p'1}$ везде в G, за исключением нулей функции $w(z)$. Поэтому в силу (4) и предложения 2^0 получаем $g(z)\in B^{\alpha}_{p,1}(G)$, следовательно, по теореме 2 из ([8]) $\omega(z)=-Tg\in C(E)$. Пусть G_w^* — множество особенностей функции $w(z)$. Внутри открытого множества $G-G_w^*$ функция $w(z)$, очевидно, является регулярным решением уравнения $Lw=0$. Тогда для функции $\Phi(z)$, заданной равенством (5), имеем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\overline{z}}=e^{-\omega}\left(\frac{\partial w}{\partial\overline{z}}+wg\right)=e^{-\omega}(-Aw-B\overline{w}+wg),$$

откуда $\partial\Phi/\partial\overline{z}=0$ почти везде в $G-G_w^*$, т. е. $\Phi(z)$ голоморфна внутри $G-G_w^*$. Так как G_w^* содержит, по определению, только изолированные точки, то лемма доказана.

В частности, если $w(z)$ — регулярное решение уравнения $Lw=0$ в области G, то $\Phi(z)$ будет голоморфной в G.

Из формулы (5) видно, что множество нулей и множество особых точек $w(z)$ совпадают соответственно с множеством нулей и множеством полюсов и существенно особых точек аналитической функции $\Phi(z)$. Отсюда следует, что если $w(z)$ тождественно не равна нулю, то ее нули и полюсы изолированы, причем кратность нуля и порядок полюса являются целыми положительными числами и т. д. Вообще, из формулы (5) следует, что обобщенные решения уравнения $Lw=0$ с коэффициентами из $B^{\alpha}_{p,1}(G)$, $1<p<2$, $\alpha=(2-p)/p$, обладают свойствами обобщенных аналитических функций в смысле И. Н. Векуа ([1]).

Если $w(z)$ тождественно не обращается в нуль, то формулу (5) можно записать в виде

$$w(z)=\Phi(z)\cdot e^{\omega(z)}, \tag{6}$$

где

$$\omega(z)=-\frac{1}{\pi}\iint_G\left(A(\zeta)+B(\zeta)\frac{\overline{w(\zeta)}}{w(\zeta)}\right)\frac{d\xi\,d\eta}{\zeta-z}.$$

Используя формулу (6), можно распространить на обобщенные решения уравнения $Lw=0$ также многие известные граничные теоремы единственности из теории аналитических функций ([10]).

В заключение автор, пользуясь случаем, выражает искреннюю благодарность акад. И. Н. Векуа за постановку задачи и внимание к работе, чл.-корр. АН КазССР Т. И. Аманову за обсуждения результатов и полезные советы.

Институт математики и механики
Академии наук КазССР
Алма-Ата

Поступило
20 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *И. Н. Векуа*, Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [2] *N. Theodoresko*, Thesis, Paris, 1931. [3] *L. Bers*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., v. 37, № 1, 42 (1951). [4] *О. В. Бесов, В. П. Ильин*, Матем. заметки, т. 6, № 2, 423 (1968). [5] *О. В. Бесов*, Матем. заметки, т. 1, № 2, 235 (1967). [6] *О. В. Бесов*, Сибирск. матем. журн., т. 8, № 2, 243 (1967). [7] *Н. К. Блиев*, ДАН, т. 205, № 3, 513 (1972). [8] *Н. К. Блиев*, Изв. АН КазССР, сер. физ.-матем., № 1, 80 (1973). [9] *И. Н. Векуа*, Матем. сборн., т. 31 (73), 2, 217 (1952). [10] *И. И. Привалов*, Граничные свойства однозначных аналитических функций, М., 1950.