Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 517.53

МАТЕМАТИКА

Академик АН АрмССР М. М. ДЖРБАШЯН

О ЗАМКНУТОСТИ СИСТЕМЫ ТИПА МИТТАГ — ЛЕФФЛЕРА

1°. Известную теорему Саса [1] о замкнутости системы $\{x^{\lambda_j}\}_1^\infty$, $\operatorname{Re}\lambda_j > -{}^1/_2$, в $L_2(0, 1)$, можно сформулировать и в такой форме:

Для замкнутости системы $\{e^{-\lambda_j x}\}_1^\infty$, $\operatorname{Re}\lambda_j>0$, *в* $L_2(0, +\infty)$ *необходимо и достаточно, чтобы* $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(1+|\lambda_j|^2)^{-1}\operatorname{Re}\lambda_j=+\infty$.

Позже Винер и Пэли [2] получили результат Саса, опираясь на свою знаменитую теорему об интегральном представлении класса H_2 аналитических в полуплоскости $\operatorname{Re}\lambda>0$ функций.

Существенное обобщение указанной теоремы для классов $\mathscr{H}_2[\alpha;\ \omega]$, ${}^1/_2<\alpha<+\infty$, $-1<\omega<1$, аналитических в области угла

$$\Delta(\alpha)=\{\lambda;\ |\arg\lambda|<\pi/(2\alpha),\quad 0<|\lambda|<+\infty, \tag{1}$$

функций $F(\lambda)$, для которых

$$\sup_{|\varphi|<\pi/(2\alpha)}\left\{\int_0^\infty |F(re^{i\varphi})|^2 r^\omega\,dr\right\}<+\infty, \tag{2}$$

было установлено затем автором совместно с А. Е. Аветисяном.

Приведем формулировку этого результата, поскольку она служит основой для нашей заметки, посвященной установлению замкнутости некоторых общих систем функций, порожденных целыми функциями типа Миттаг — Леффлера

$$E_\rho(z;\mu)=\sum_{k=0}^\infty \frac{z^k}{\Gamma(\mu+k\rho^{-1})},\quad \mu>0,\quad \rho>0. \tag{3}$$

Теорема A*. 1) *Класс* $\mathscr{H}_2[\alpha;\ \omega]$, ${}^1/_2<\alpha<+\infty$, $-1<\omega<+1$, *совпадает с множеством функций, представимых в виде*

$$F(\lambda)=\int_0^{+\infty} E_\rho(-\lambda\tau^{1/\rho};\ \mu)\,\tau^{\mu-1}v(\tau)\,d\tau,\quad \lambda\in\Delta(\alpha), \tag{4}$$

где

$$\rho=\alpha/(2\alpha-1),\quad \mu=(1+\omega+\rho)/(2\rho). \tag{5}$$

2) *Если* $F(\lambda)\in\mathscr{H}_2[\alpha,\ \omega]$, *то существуют граничные функции* $F(re^{\pm\pi/(2\alpha)})r^{\omega/2}\in L_2(0, +\infty)$ *и из* (4) *следует формула обращения*

$$v(\tau)=\frac{1}{2\pi\rho}\frac{d}{d\tau}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{-i\tau t}-1}{-it}F\left(e^{-i(\pi/(2\alpha))\operatorname{sign} t}|t|^{1/\rho}\right)\left(e^{i(\pi/2)\operatorname{sign} t}|t|\right)^{\mu-1}dt \tag{6}$$

почти для всех $\tau\in(0, +\infty)$.

---

* См. [3], а также [4], теорема 7.7′.

2°. Прежде чем сформулировать и наметить доказательство основного результата данной заметки, приведем некоторые леммы.

а) Лемма 1. *При условии* (5) *для произвольной точки* $\lambda\in\Delta(\alpha)$ *и при любом целом* $k\geqslant 0$

$$E_\rho^{(k)}(-\lambda\tau^{1/\rho};\mu)\,\tau^{\mu+k/\rho-1}\in L_2(0,+\infty),\qquad E_\rho^{(k)}(-\lambda x;\mu)\,x^{\omega/2+k}\in L_2(0,+\infty). \tag{7}$$

Не останавливаясь на подробностях, отметим, что доказательство леммы непосредственно следует из интегрального представления функции $E_\rho(-\lambda;\mu)$ в области значений $\lambda\in\Delta(\alpha)$ (см. [4], лемма 3.4).

б) Пусть $\{\lambda_j\}_1^\infty\in\Delta(\alpha)$ — произвольная последовательность комплексных чисел и пусть при данном k, $1\leqslant k<+\infty$, $s_k\geqslant 1$ означает кратность появления λ_k на отрезке $\{\lambda_j\}_1^k$ этой последовательности.

Лемма 2. *Для аналитической в области* $\Delta(\alpha)$ *функции*

$$\pi_n(\lambda)=\prod_{j=1}^{n}\frac{\lambda^\alpha-\lambda_j^\alpha}{\lambda^\alpha-\bar\lambda_j^\alpha},\qquad 1\leqslant n<+\infty, \tag{8}$$

справедлива оценка

$$|\pi_n(\lambda)|\leqslant\exp\left\{-\rho(\lambda)\sum_{j=1}^{n}\frac{\operatorname{Re}\lambda_j^\alpha}{1+|\lambda_j|^{2\alpha}}\right\},\qquad \lambda\in\Delta(\alpha), \tag{9}$$

где $\rho(\lambda)>0$ *не зависит от* n.

Лемма 3. *При условии*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1+|\lambda_j|^{2\alpha})^{-1}\operatorname{Re}\lambda_j^\alpha=+\infty \tag{10}$$

бесконечное произведение

$$\mathscr{B}_\alpha(\lambda)=\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^\alpha-\lambda_j^\alpha}{\lambda^\alpha+\bar\lambda_j^\alpha}\varkappa_j,\qquad \varkappa_j=\frac{|1-\lambda_j^{2\alpha}|}{1-\lambda_j^{2\alpha}}, \tag{11}$$

сходится в области $\Delta(\alpha)$, *причем*

$$\mathscr{B}_\alpha(\lambda)\neq 0,\qquad |\mathscr{B}_\alpha(\lambda)|\leqslant 1,\qquad \lambda\in\Delta(\lambda). \tag{12}$$

3°. Для данного ω, $-1<\omega<+1$, обозначим через $L_{2,\omega}(0,+\infty)$ множество измеримых на $(0,+\infty)$ функций $f(x)$, для которых

$$\int_0^{+\infty}|f(x)|^2x^\omega\,dx<+\infty. \tag{13}$$

Всюду ниже, вновь полагая, что $1/2<\alpha<+\infty$, $\{\lambda_j\}_1^\infty\in\Delta(\alpha)$ и

$$\rho=\alpha/(2\alpha-1),\qquad \mu=(1+\omega+\rho)/(2\rho),\qquad -1<\omega<+1, \tag{14}$$

введем в рассмотренные системы функций $\{\omega_\rho(\tau;\lambda_j)\}_1^\infty$ и $\{\omega_\rho^*(x;\lambda_j)\}_1^\infty$, где

$$\omega_\rho(\tau;\lambda_j)=E_\rho^{(s_j-1)}(-\lambda_j\tau^{1/\rho};\mu)\,\tau^{\mu+(s_j-1)/\rho-1}$$

$$\omega_\rho^*(x;\lambda_j)=E_\rho^{(s_j-1)}(-\lambda_jx;\mu)\,x^{s_j-1}. \tag{15}$$

Заметим, что по лемме 1

$$\omega_\rho(\tau;\lambda_j)\in L_2(0,+\infty),\qquad \omega_\rho^*(x;\lambda_j)\in L_{2,\omega}(0,+\infty), \tag{16}$$

и в силу (14) легко видеть, что в соответствующих пространствах $L_2(0, +\infty)$ или $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ наши системы замкнуты или незамкнуты одновременно.

Теорема 1. *Для замкнутости системы* $\{\omega_\rho^*(x; \lambda_j)\}_1^\infty$ *в* $L_{2,\omega}(0, +\infty)$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1+|\lambda_j|^{2\alpha})^{-1}\operatorname{Re}\lambda_j^\alpha=+\infty. \tag{17}$$

Наметим доказательство этой теоремы. Пусть для некоторой функции $f_0(x)\in L_{2,\omega}(0, +\infty)$

$$\int_0^{+\infty}\omega_\rho^*(x;\lambda_j)\,x^\omega f_0(x)\,dx=0, \quad 1\leqslant j<+\infty. \tag{18}$$

Заметив, что в силу (14) $v_0(\tau)\equiv f_0(\tau^{1/\rho})\tau^{\mu-1}\in L_2(0, +\infty)$, из (15) заключаем, что равенства (18) могут быть записаны в виде

$$\int_0^{+\infty}\omega_\rho(\tau;\lambda_j)\,v_0(\tau)\,d\tau=0, \quad 1\leqslant j<+\infty. \tag{19}$$

Поскольку $v_0(\tau)\in L_2(0, +\infty)$, образуя интеграл

$$F_0(\lambda)=\int_0^{+\infty}E_\rho(-\lambda\tau^{1/\rho};\,\mu)\,\tau^{\mu-1}v_0(\tau)\,d\tau, \quad \lambda\in\Delta(\alpha), \tag{20}$$

согласно теореме A будем иметь $F_0(\lambda)\in\mathscr{H}_2[\alpha;\,\omega]$.

Отсюда в силу определения (15) нашей системы $\{\omega_\rho(\tau;\,\lambda_j)\}_1^\infty$ и равенств (19) получим $F_0^{(s_j-1)}(\lambda_j)=0$, $1\leqslant j<+\infty$. Поэтому, легко видеть, что

$$\pi_n^{-1}(\lambda)F_0(\lambda)\in\mathscr{H}_2[\alpha,\,\omega]$$

и, следовательно, по теореме A

$$\pi_n^{-1}(\lambda)F_0(\lambda)=\int_0^{+\infty}E_\rho(-\lambda\tau^{1/\rho};\,\mu)\,\tau^{\mu-1}v_n(\tau)\,d\tau, \quad \lambda\in\Delta(\alpha), \tag{21}$$

где $v_n(\tau)\in L_2(0, +\infty)$.

Наконец, из (21), пользуясь оценкой (9) леммы 2, приходим к неравенствам

$$|F_0(\lambda)|\leqslant\sqrt{\Omega(F_0,\lambda)}\exp\left\{-\rho(\lambda)\sum_{j=1}^{n}\frac{\operatorname{Re}\lambda_j^\alpha}{1+|\lambda_j|^{2\alpha}}\right\}, \quad \lambda\in\Delta(\alpha), \quad 1\leqslant n<+\infty,$$

где

$$\Omega(F_0,\lambda)\equiv M(F_0)\int_0^{+\infty}|E_\rho(-\lambda\tau^{1/\rho};\,\mu)\,\tau^{\mu-1}|^2\,d\tau<+\infty$$

согласно лемме 1. Отсюда, при условии (17) теоремы переходом к пределу при $n\to+\infty$ мы вновь получим тождество $F_0(\lambda)\equiv 0$, $\lambda\in\Delta(\alpha)$.

Но из (20) и этого тождества по формуле обращения (6) теоремы A заключаем, что $v_0(\tau)=f_0(x)=0$ почти всюду на полуоси $(0, +\infty)$. Это в силу (18) и означает, что при условии (17) теоремы наша система замкнута в $L_{2,\omega}(0,+\infty)$.

Положив теперь, что $\sum\limits_{j=1}^{\infty}(1+|\lambda_j|^{2\alpha})^{-1}\mathrm{Re}\,\lambda_j^{\alpha}<+\infty$, заметим, что по лемме 3 функция $(1+z)^{-1}\mathscr{B}^{(\alpha)}(z)$ регулярна в области $\Delta(\alpha)$, и как легко видеть, принадлежит классу $\mathscr{H}_2[\alpha;\omega]$.

Следовательно, по теореме A будем иметь

$$\frac{\mathscr{B}_\alpha(\lambda)}{1+\lambda}=\int\limits_0^{+\infty}E_\rho(-\lambda\tau^{1/\rho};\mu)\tau^{\mu-1}v_\alpha(\tau)\,d\tau=\int\limits_0^{+\infty}E_\rho(-\lambda x;\mu)x^\omega f_\alpha(x)\,dx,\quad \lambda\in\Delta(\alpha), \tag{22}$$

где функции $v_\alpha(\tau)\in L_2(0,+\infty)$ и $f_\alpha(x)=v_\alpha(x^\rho)x^{\rho(1-\mu)}\in L_{2,\omega}(0,+\infty)$, очевидно, отличны от тождественного нуля на полуоси $(0,+\infty)$.

Но при сходимости ряда (17) каждая точка $\lambda=\lambda_j$ в $\{\lambda_j\}_1^\infty$ имеет конечную кратность $p_j\geqslant s_j$. Поэтому из (11) следует, что

$$\mathscr{B}_\alpha^{(k)}(\lambda_j)=0,\quad k=0,1,\ldots,p_j-1;\quad 1\leqslant j<+\infty.$$

Поэтому (s_j-1)-кратным дифференцированием (22) в силу (15) получим

$$\int\limits_0^\infty \omega_\rho^*(x;\lambda_j)x^\omega f_\alpha(x)\,dx=0,\quad 1\leqslant j<+\infty.$$

Так как $f_\alpha(x)\not\equiv 0$, $0<x<+\infty$, то это и значит, что условие (17) теоремы действительно необходимо для замкнутости системы $\{\omega_\rho^*(x;\lambda_j)\}_1^\infty$.

Легко видеть, что в специальном случае, когда $\rho=1$ и $\omega=0$, из теоремы 1 следует указанная выше теорема Саса, в более общей формулировке ранее отмеченная уже в заметке ([5]).

Теорема 2. *Для замкнутости системы* $\{e^{-\lambda_j x}x^{s_j-1}\}_1^\infty$, $\mathrm{Re}\,\lambda_j>0$, *в* $L_2(0,+\infty)$ *необходимо и достаточно выполнение условия*

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1+|\lambda_j|^2)^{-1}\,\mathrm{Re}\,\lambda_j=+\infty.$$

Институт математики
Академии наук АрмССР
Ереван

Поступило
19 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *O. Szasz*, Math. Ann., v. 77, 482 (1916). [2] *Н. Винер, Р. Пэли*, Преобразование Фурье в комплексной области, «Наука», 1964. [3] *М. М. Джрбашян, А. Е. Аветисян*, Сиб. матем. журн., т. 1, № 3, 383 (1960). [4] *М. М. Джрбашян*, Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области, «Наука», 1966. [5] *М. М. Джрбашян*, ДАН, т. 141, № 3, 539 (1961).