Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 517.946.4 *МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФИЗИКА*

В. Е. ЗАХАРОВ, Л. А. ТАХТАДЖЯН, Л. Д. ФАДДЕЕВ

ПОЛНОЕ ОПИСАНИЕ РЕШЕНИЙ «SIN-GORDON» УРАВНЕНИЯ

(Представлено академиком Г. И. Марчуком 25 XII 1973)

Уравнение, упомянутое в названии, имеет вид

$$u_{tt}-u_{xx}+\sin u=0. \tag{1}$$

Оно встречается во многих разделах теоретической физики и прикладной математики. В частности, в форме

$$\sigma_{\xi\tau}=\sin\sigma, \tag{2}$$

где $\xi={}^1/_2(x+t)$, $\tau={}^1/_2(x-t)$, $\sigma(\xi,\tau)=u(x,t)$ оно возникает в задачах нелинейной оптики (см. [1]). В первоначальной форме оно может служить как нетривиальная модель теории поля [2-4].

Естественные граничные условия для уравнений (1) и (2) имеют вид соответственно

$$u(x,t)\underset{|x|\to\infty}{=}0 \pmod{2\pi}, \tag{3}$$

$$u(\xi,\tau)\underset{|\xi|\to\infty}{=}0 \pmod{2\pi}, \tag{4}$$

откуда видно, что задача (2), (4) содержит, грубо говоря, половину решений задачи (1), (4).

Рассмотрим задачу

$$J\psi_x+A\psi+\frac{1}{\lambda}H\psi=\lambda\psi, \tag{5}$$

где ψ — вектор из двух компонент, а J, H и A — матрицы 2×2, элементы которых выражаются через решение $u(x,t)$ уравнения (1):

$$J=\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix},\quad A=\frac{i}{4}\begin{pmatrix}0&w\\w&0\end{pmatrix},\quad H=\frac{1}{16}\begin{pmatrix}e^{iu}&0\\0&e^{-iu}\end{pmatrix}, \tag{6}$$

$$w=u_x+u_t.$$

Из явного вида этих матриц следуют соотношения (черта — знак комплексного сопряжения)

$$\bar{A}=-A,\quad TAT=A=JAJ,\quad THT=\bar{H}=-JHJ,\quad T=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}. \tag{7}$$

Уравнение (1) в терминах матриц A и H имеет вид

$$A_t=A_x+2[H,J],\qquad H_t=-H_x+2(AJH-HJA). \tag{8}$$

Можно проверить, что если ψ меняется со временем согласно уравнению

$$\psi_t=\psi_x-\frac{2}{\lambda}H\psi, \tag{9}$$

то оно удовлетворяет уравнению (5) при одном и том же значении параметра λ при всех t.

Уравнения (5), (8), (9) играют роль уравнений $L\psi=\lambda\psi$, $L_t=[AL]$, $\psi_t=A\psi$, возникающих в предыдущих случаях, решаемых методом обратной задачи (см. ([5–7])).

Рассмотрим матрицу

$$E(x,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} e_+(x,\lambda) & e_-(x,\lambda) \\ ie_+(x,\lambda) & -ie_-(x,\lambda)\end{pmatrix}, \qquad \begin{matrix} e_+(x,\lambda)=\overline{e^{i(\lambda-1/16\lambda)x}}, \\ e_-(x,\lambda)=e_+(x,\lambda), \end{matrix}$$

удовлетворяющую уравнению

$$JE_x=\left(\lambda-\frac{1}{16\lambda}\right)E, \quad S=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

в которое уравнение (5) переходит при $|x|\to+\infty$, и соотношению

$$JE=-iES, \tag{10}$$

которое проверяется непосредственно.

Определим матричные решения F и G уравнения (5) заданием их асимптотик при $x\to\infty$ и $x\to-\infty$ соответственно;

$$F(x,\lambda,t)-E(x,\lambda)=0(1), \quad x\to\infty,$$
$$G(x,\lambda,t)-E(x,\lambda)=0(1), \quad x\to-\infty.$$

В силу уравнения (5)

$$\det F=\det G=\det E=-i. \tag{11}$$

Матрицы F и G связаны линейным соотношением

$$G(x,\lambda,t)=F(x,\lambda,t)\,T(\lambda,t).$$

Вследствие (7), (10), (11) матрица $T(\lambda,t)$ удовлетворяет соотношениям

$$T(\lambda,t)=-J\overline{T}(\lambda,t)J, \quad S\overline{T}(-\lambda,t)S=T(\lambda,t), \quad \det T(\lambda,t)=1,$$

а уравнение (9) позволяет утверждать, что

$$T(\lambda,t)=e^{i(\lambda+1/16\lambda)tS}\,T(\lambda,0)\,e^{-i(\lambda+1/16\lambda)tS}.$$

Из написанных формул видно, что матрица $T(\lambda,t)$ может быть выражена через 2 комплекснозначные функции

$$T(\lambda,t)=\begin{pmatrix} \bar a(\lambda,t) & b(\lambda,t) \\ -\bar b(\lambda,t) & a(\lambda,t)\end{pmatrix},$$

причем при всех t

$$a(-\lambda)=\bar a(\lambda), \quad b(-\lambda)=-\bar b(\lambda), \quad |a|^2+|b|^2=1, \tag{12}$$

$$a(\lambda,t)=a(\lambda,0); \quad b(\lambda,t)=\exp\left\{2i\left(\lambda+\frac{1}{16\lambda}\right)t\right\}b(\lambda,0).$$

Решения F и G имеют интегральные представления (при каждом t)

$$F(x,\lambda)=E(x,\lambda)+\int_x^\infty K_1(x,y)E(y,\lambda)\,dy+\frac{1}{\lambda}\int_x^\infty K_2(x,y)E(y,\lambda)\,dy, \tag{13}$$

$$G(x,\lambda)=E(x,\lambda)+\int_{-\infty}^x L_1(x,y)E(y,\lambda)\,dy+\frac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^x L_2(x,y)E(y,\lambda)\,dy, \tag{13'}$$

где матрицы-ядра K_1, K_2 удовлетворяют соотношениям

$$K_1=-J\overline{K}_1J=T\overline{K}_1T, \quad K_2=-J\overline{K}_2J=-T\overline{K}_2T$$

и, таким образом, могут быть представлены через скалярные ядра в виде

$$K_1=\begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & \overline{M}\end{pmatrix}, \quad K_2=-i\begin{pmatrix} 0 & N \\ \overline{N} & 0\end{pmatrix}.$$

Аналогичные соотношения и представления имеют место и для матриц-ядер L_1 и L_2.

Среди условий совместности уравнения (5) и интегральных представлений (13), (13′) имеются соотношения

$$JK_2(x, x)-16H(x)K_2(x, x)J=H(x)-{}^1/_{16}J.$$

Аналогичные соотношения имеются и для матриц-ядер L_1 и L_2. Из последнего соотношения следует, в частности, что $u(x, t)$ явно выражается через $N(x, x, t)$

$$u(x,t)=-i\ln\frac{1+16i\bar{N}(x,x,t)}{1-16iN(x,x,t)}. \tag{14}$$

Из (13) и (13′) следует, что первый столбец f_1 матрицы F и второй столбец g_2 матрицы G имеют аналитическое продолжение в верхнюю полуплоскость переменной λ, а дополнительные столбцы продолжаются в нижнюю полуплоскость. Коэффициент перехода $a(\lambda)$ явно выражается через $f_1(x,\lambda)$ и $g_2(x,\lambda)$:

$$a(\lambda)=(Jf_1(x, \lambda),\quad g_2(x, \lambda))$$

и, таким образом, также продолжается в верхнюю полуплоскость. Последнее условие вместе с (12) позволяет восстановить его по заданному $b(\lambda)$ и распределению нулей в верхней полуплоскости. Эти нули располагаются симметрично относительно мнимой оси, и, вообще говоря, могут накапливаться к вещественной оси. В дальнейшем мы будем исключать последнюю возможность и для простоты будем считать, что эти нули простые; случай кратных нулей можно рассмотреть предельным переходом.

Данные рассеяния, однозначно определяющие коэффициенты w и u уравнения (5), состоят из набора коэффициентов перехода $a(\lambda)$, $b(\lambda)$ и нормирующих множителей m_j, расположенных симметрично относительно мнимой оси, где j пробегает множество нулей коэффициента $a(\lambda)$. Зависимость $b(\lambda, t)$ от t дается формулой (12), а для m_j нетрудно получить, используя (9), что

$$m_j(t)=\exp\left\{2i\left(\lambda_j+\frac{1}{16\lambda_j}\right)t\right\}m_j(0),\quad j=1,\ldots,N, \tag{15}$$

где λ_j — нули коэффициента $a(\lambda)$.

Формализм обратной задачи позволяет восстановить ядра K_1 и K_2, а с ними и решение $u(x, t)$ уравнения (1) по данным рассеяния посредством линейных интегральных уравнений. Приведем вид этих уравнений в терминах скалярных ядер $M(x, y)$ и $N(x, y)$

$$\begin{gathered} M(x,y)+F_1(x+y)+\int_x^\infty M(x,z)F_1(z+y)\,dz+\int_x^\infty N(x,z)F_2(z+y)\,dz=0,\\ 16N(x,y)-F_2(x+y)-\int_x^\infty M(x,z)F_2(z+y)\,dz+\int_x^\infty N(x,z)F_3(z+y)\,dz=0, \end{gathered} \tag{16}$$

где ядра F_1, F_2 и F_3 строятся через данные рассеяния по формулам

$$\begin{gathered} F_1(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty r(\lambda)\,e^{i(\lambda-1/16\lambda)z}\,d\lambda+\sum_{j=1}^N m_je^{i(\lambda_j-1/16\lambda_j)z},\\ F_2(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty \frac{r(\lambda)}{\lambda}e^{i(\lambda-1/16\lambda)z}\,d\lambda+\sum_{j=1}^N\frac{m_j}{\lambda_j}e^{i(\lambda_j-1/16\lambda_j)z},\\ F_3(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^\infty\frac{r(\lambda)}{\lambda^2}\,e^{i(\lambda-1/16\lambda)z}\,d\lambda+\sum_{j=1}^N\frac{m_j}{\lambda_j^2}\,e^{i(\lambda_j-1/16\lambda_j)z} \end{gathered} \tag{17}$$

и $r(\lambda)=b(\lambda)/a(\lambda)$, а зависимость ядер F_1, F_2 и F_3 от t определяется формулами (12), (15).

Приведем сразу выражение для решения $u(x, t)$ уравнения (1): при $b(\lambda, t)\equiv 0$

$$u(x,t)==-2i\ln\frac{\det(I+V(x,t))}{\det(I-V(x,t))}, \tag{18}$$

где $V(x, t)$ — матрица $N\times N$ с элементами

$$V_{jk}(x,t)=\frac{im_j}{\lambda_j+\lambda_k}e^{i(\mu_j+\mu_k)x+i(\lambda_j+1/16\lambda_j)t}, \tag{19}$$

$$\mu_j=\lambda_j-\frac{1}{16\lambda_j}.$$

В частности, при $N=1$ получим известную формулу для решения уравнения (1):

$$u(x,t)=4\operatorname{arctg} e^{\pm\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x-vt-x_0)},$$

$$v=\frac{1-16a_1^2}{1+16a_1^2},\quad \lambda_1=-ia_1,\quad x_0=\ln\frac{|m_1|}{2a_1}\sqrt{1-v^2}, \tag{20}$$

а знак в (20) противоположен знаку m_1.

Полученное решение естественно называть солитоном для (1) уравнения.

В случае $N=2$ и $\lambda_1=-\lambda_2^*$, получим, что

$$u(x,t)=4\operatorname{arctg}\left\{\frac{|c_1|}{a_1}\frac{\operatorname{ch}\left[\frac{a_1}{|\lambda_1|}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(x-vt-\gamma_0)\right]}{\cos\frac{c_1}{|\lambda_1|}\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}(t-vx+\beta_0)}\right\},$$

$$v=\frac{1-16|\lambda_1|^2}{1+16|\lambda_1|^2},\quad \lambda_1=c+ia_1,$$

$$\beta_0=\frac{|\lambda_1|}{c_1}\sqrt{1-v^2}\arg\frac{m_1}{\lambda_1},\quad \gamma_0=\frac{|\lambda_1|}{a_1}\sqrt{1-v^2}\ln\left|\frac{c_1m_1}{2a_1\lambda_1}\right|.$$

Полученное решение мы будем называть двойным солитоном для «sin-Gordon» уравнения. Решение уравнения (1), определяемое формулой (18), естественно называть N-солитонным решением «sin-Gordon» уравнения. Оказывается, что в общем случае N-солитонные решения при больших $|t|$ распадаются на l солитонов и p двойных солитонов, где $l+2p=N$; здесь l — количество чисел λ_i, лежащих на мнимой оси, а p — количество расположенных симметрично относительно мнимой оси пар чисел $(\lambda_j, -\lambda_j)$. Отметим, что, таким образом, N-солитонное решение описывает процесс упругого рассеяния солитонов и двойных солитонов.

Укажем, наконец, что, отправляясь от развитой схемы, можно показать, что «sin-Gordon» уравнение является вполне интегрируемой гамильтоновой системой (ср. ([8])).

Новосибирский государственный университет

Поступило 6 XII 1973

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *G. L. Lamb jr.*, Rev. Mod. Phys., v. 43, № 2, 99 (1971). [2] *T. H. R. Skyrme*, Proc. Roy. Soc. A, v. 262, 237 (1971). [3] *J. K. Perring, T. H. R. Skyrme*, Nucl. Phys., v. 31, 55 (1962). [4] *D. Finkelstein, C. V. Misner*, Ann. Phys. (N. Y.), v. 6, 230 (1959). [5] *G. S. Gardner, J. Green et al.*, Phys. Rev. Lett., v. 19, 1095 (1967). [6] *П. Д. Лэкс*, Сборн. Математика, т. 13, № 6, 128 (1969). [7] *В. Е. Захаров, А. Б. Шабат*, ЖЭТФ, т. 61, 118 (1971). [8] *В. Е. Захаров, Л. Д. Фаддеев*, Функциональн. анализ и его прилож., т. 5 4, 18 (1971).