**Доклады Академии наук СССР**
**1974. Том 219, № 6**

УДК 517.53 *МАТЕМАТИКА*

А. Я. ИСМАЙЛОВ

# О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЯХ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ ТЕОРИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ВЕКУА В ОБЛАСТЯХ С НЕГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

*(Представлено академиком И. Н. Векуа 19 VI 1974)*

В данной работе для сингулярного оператора теории обобщенных аналитических функций по Векуа ([1]) получены оценки типа оценки Зигмунда при некоторых условиях на контур интегрирования и плотность. На основе полученной оценки доказан аналог теоремы Племеля — Привалова и построены пространства типа пространства из ([2,3]). В настоящей работе существенно использована техника работы ([4]), рукопись которой с подробными доказательствами была любезно предоставлена автору А. А. Бабаевым и В. В. Салаевым. Исключение составляют лишь конструкции пространств, построенных в работах ([2,5]). Как нам кажется, в настоящей работе разработан более естественный способ описания этих пространств. Некоторые полученные в этом направлении факты усиливают результаты и для случая сингулярного оператора классической теории аналитических функций.

Для полноты изложения приведем некоторые понятия из ([4]), а именно, понятие модуля непрерывности; отношений $\overset{\text{сущ}}{\leqslant}$ и $\overset{\text{сущ}}{=}$; обобщенной обратной и классов $S_\gamma$ и $T_\gamma$.

Пусть $\gamma$ — замкнутая жорданова спрямляемая кривая $t=t(s)$, $0\leqslant s\leqslant l$, — уравнение кривой $\gamma$ в дуговых координатах; $S(t,\tau)$ — небольшая из длин дуг, стягивающих точки $t,\tau\in\gamma$,

$$d_0=\sup_{t,\tau\in\gamma} S(t,\tau),\quad d_1=\sup_{t,\tau\in\gamma}|t-\tau|.$$

Модулем непрерывности функции $f\in C_\gamma$ называется функция

$$\omega_f(\delta)=\delta\sup_{\xi\geqslant\delta}\frac{1}{\xi}\sup_{|t-\tau|\leqslant\xi}|f(t)-f(\tau)|,\quad 0<\delta\leqslant d_1.$$

Через $K_{(0,a]}$ обозначим множество положительных монотонно возрастающих функций с условием $\varphi(\delta)\to 0$ при $\delta\to 0$. $S_\gamma$ означает множество упорядоченных пар $(\mu,\gamma)\in K_{(0,d_1)}\times K_{(0,d_0)}$, удовлетворяющих неравенствам

$$S(t,\tau)\leqslant\mu(|t-\tau|),\quad |t-\tau|\geqslant\nu(s(t,\tau)),$$

$$T_\gamma=\left\{(\mu,\nu)\in S_\gamma\,\middle|\,\frac{\mu(\delta)}{\delta},\ \frac{\delta}{\nu(\delta)}\ \text{не возрастают}\right\}.$$

Пусть $f,g\in K_{(0,a]}$. По определению $f\overset{\text{сущ}}{\leqslant}g$, если $f(x)\leqslant g(x)$ на некотором плотном на $(0,a]$ множестве, содержащем $a$.

$$f\overset{\text{сущ}}{=}g\overset{\text{опр}}{\Leftrightarrow}f\overset{\text{сущ}}{\leqslant}g,\quad g\overset{\text{сущ}}{\leqslant}f.$$

Для $f\in K_{(0,a]}$ произвольная функция $\check{f}\in K_{(0,a]}$ называется обобщенной обратной $f$, если

$$\check{f}\overset{\text{сущ}}{=}\sup\{y \mid f(y)\leqslant x\}.$$

Рассмотрим обобщенный интеграл Коши

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Omega_1(z,\xi)\,u(\xi)\,d\xi-\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \Omega_2(z,\xi)\,\overline{u(\xi)}\,\overline{d\xi},$$

где

$$\Omega_{1,2}(z,\xi)=\frac{e^{\varphi_1(z,\xi)}\pm e^{\varphi_2(z,\xi)}}{2(z-\xi)},$$

$$\left|e^{\varphi_j(t,\xi)}-e^{\varphi_j(\xi,\xi)}\right|\leqslant M|t-\xi|^{(p-2)/p},\quad j=1,\,2,\quad p>2.$$

Предложение 1. *При* $z\in\gamma^+$

$$W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u(\xi)-u(z)}{\xi-z}\,d\xi-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{2}\Bigg(\int_\gamma \frac{e^{\varphi_j(z,\xi)}-e^{\varphi_j(\xi,\xi)}}{2(\xi-z)}\,(u(\xi)-u(z))\,d\xi+$$

$$+(-1)^j\int_\gamma \frac{e^{\varphi_j(z,\xi)}-e^{\varphi_j(\xi,\xi)}}{2(\xi-z)}\,\overline{(u(\xi)-u(z))}\,\overline{d\xi}\Bigg)+u(z).$$

Следствие. *Если* $|t-\tau|\geqslant\nu(s(t,\tau))$, $\nu\in K_{(0,a]}$ *и сходится интеграл* $\int_0^{a_1}(\omega_u(\nu(\xi))/\nu(\xi))\,d\xi$, *то для любого* $t\in\gamma$

$$\lim_{\substack{z\to t\\ z\in\gamma^+}}W(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{u(\xi)-u(t)}{\xi-t}\,d\xi-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{2}\Bigg(\int_\gamma \frac{e^{\varphi_j(t,\xi)}-e^{\varphi_j(\xi,\xi)}}{2(\xi-t)}\,(u(\xi)-u(t))\,d\xi+$$

$$+(-1)^j\int_\gamma \frac{e^{\varphi_j(t,\xi)}-e^{\varphi_j(\xi,\xi)}}{2(\xi-t)}\,\overline{(u(\xi)-u(t))}\,\overline{d\xi}\Bigg)+u(t).$$

Обозначим

$$g(t)=\int_\gamma \frac{f(t,\xi)-f(\xi,\xi)}{\xi-t}\,(u(\xi)-u(t))\,d\xi,\quad \overline{u}(t)=\int_\gamma \frac{u(\xi)-u(t)}{\xi-t}\,d\xi.$$

Предложение 2. *Пусть* $(\mu,\nu)\in S_\gamma$ *и* $\mu$, $\nu$ *взаимно обобщенные обратные. Тогда, если* $f(t,\xi)$ *непрерывна по совокупности переменных и*

$$\int_0^{d_0}\frac{\omega_u(\nu(\xi))}{\nu(\xi)}\,d\xi<\infty,$$

*то при* $\delta\in(0,d_1]$

$$\omega_{g+\bar{u}}(\delta)\leqslant C\Bigg(\int_0^{\mu(\delta-0)}\frac{\omega_u(\nu(\xi))}{\nu(\xi)}\,d\xi+\delta\int_{\mu(\delta-0)}^{d_0}\frac{\omega_u(\nu(\xi))}{\nu^2(\xi)}\,d\xi+$$

$$+\omega_f^{(1)}\delta\int_{\mu(\delta-0)}^{d_0}\frac{\omega_u(\nu(\xi))}{\nu(\xi)}\,d\xi+\omega_u(\delta)\int_{\mu(\delta-0)}^{d_0}\frac{\omega_f^{(1)}(\nu(\xi))}{\nu(\xi)}\,d\xi\Bigg),$$

*где постоянная* $C$ *не зависит от* $u$;

$$\omega_f^{(1)}(\delta)=\max_{s(t,\tau)\leqslant\delta}|f(t,\xi)-f(\tau,\xi)|,\quad 0<\delta<l/2;$$

*правая часть $F(\delta)$ как функция аргумента $\delta$ почти возрастает и $F(\delta)/\delta$ почти убывает * с универсальными постоянными.*

Обозначим $v(t)=\lim\limits_{\substack{z\to t\\ z\in\gamma^+}} W(z)$.

Теорема (основная). *Пусть $(\mu, \nu)\in T_\gamma$ и $\mu$, $\nu$ взаимно обобщенно обратные и сходится интеграл $\int\limits_0^{d_0}(\omega(\nu(\xi)/\nu(\xi))d\xi$; тогда при $\delta\in(0, d_1]$*

$$\omega_u(\delta)\leqslant C\left(\int\limits_0^{\mu(\delta)}\frac{\omega_u(\nu(\xi))}{\nu(\xi)}d\xi+\delta\int\limits_{\mu(\delta)}^{d_0}\frac{\omega_u(\nu(\xi))}{\nu^2(\xi)}d\xi+\delta^{(p-2)/p}\int\limits_0^{d_0}\frac{\omega_u(\nu(\xi))}{\nu(\xi)}d\xi\right),$$

*где постоянная $C$ не зависит от $u$.*

Следуя [1], введем оператор

$$Z_{d_1}^{d_0}(\delta, \mu, \nu, \omega)=\int\limits_0^{\mu(\delta)}\frac{\omega(\nu(\xi))}{\nu(\xi)}d\xi+\delta\int\limits_{\mu(\delta)}^{d_0}\frac{\omega(\nu(\xi))}{\nu^2(\xi)}d\xi.$$

Основная теорема в терминах оператора $Z$ принимает следующий вид.

Теорема 1. *Пусть $\mu$, $\nu\in T_\gamma$ и $\mu$, $\nu$ взаимно обобщенно обратные; тогда*

$$\omega(\delta)=O\left(Z_{d_1}^{d_0}(\delta, \mu, \nu, \omega_u)+\delta^{(p-2)/p}\int\limits_0^{d_0}\frac{\omega_u(\nu(\xi))}{\nu(\xi)}d\xi\right),$$

*где постоянная в $O$ отношении не зависит от $u$.*

Введем

$$H_\omega=\{u\in C_\gamma\,|\,\omega_u(\delta)=O(\omega(\delta))\},$$

где $\omega\in K_{(0,\,d_1]}$ и $\omega(\delta)/\delta$ не возрастает. Норма в $H_\omega$ вводится обычным образом. Рассмотрим множество [1]

$$\Phi H_\mu=\left\{\omega\,|\,Z_{d_1}^{d_0}(\delta, \mu, \check{\mu}, \omega)=O\left(\omega(\delta)\frac{\mu(\delta)}{\delta}\right)\right\},\qquad (\mu, \check{\mu})\in T_\gamma.$$

Теорема 2. *Если $\omega\in\Phi H_\mu$, то оператор $(Vu)(t)=v(t)$ действует из $H_{\omega(\delta)}$ в $H_{\omega(\delta)\frac{\mu(\delta)}{\delta}+\delta^{\frac{p-2}{p}}}$.*

Сформулированная теорема является обобщением теоремы Привалова — Векуа [3].

Обозначим

$$J_{\nu,\omega}=\left\{u\in C_\gamma\,|\,\int\limits_0^{d_0}\frac{\omega_u(\nu(\xi))}{\nu^2(\xi)}\omega(\nu(\xi))d\xi<\infty\right\},$$

где $\nu\in K_{(0,\,d_1]}$, $|t-\tau|\geqslant\nu(S(t,\ \tau))$, $\omega\in K_{(0,\,d_1]}$. $\omega(\delta)/\delta$ не возрастает, $\int\limits_0^{d_0}(\omega(\nu(\xi))/\nu(\xi))d\xi<\infty$. В норме

$$\|u\|_{J_{\nu,\omega}}=\|u\|_{C_\gamma}+\int\limits_0^{d_0}\frac{\omega_u(\nu(\xi))}{\nu^2(\xi)}\omega(\nu(\xi))d\xi$$

$J_{\nu,\omega}$ превращается в банахово пространство.

* Функция $f(x)$ называется почти возрастающей (почти убывающей), если существует постоянная $C>0$, что

$$f(x_1)\leqslant Cf(x_2)\quad (f(x_1)\geqslant Cf(x_2))\quad\text{при}\quad x_1\leqslant x_2.$$

Имеет место формула

$$\int_0^{d_0} \frac{Z(\nu(\xi),\mu,\nu,\psi)}{\nu^2(\xi)}\varphi(\nu(\xi))\,d\xi=\int_0^{d_0} \frac{Z(\nu(\xi),\mu,\nu,\varphi)}{\nu^2(\xi)}\psi(\nu(\xi))\,d\xi.$$

Теорема 3. *Пусть*

$$(\mu,\check{\mu})\in T_\gamma,\quad u\in J_{\check{\mu},\,Z(\check{\mu}(\xi)),\,\mu,\,\check{\mu},\,\omega)},$$

$$\int_0^{d_0}\frac{\omega(\check{\mu}(\xi))}{\check{\mu}(\xi)}\,d\xi\int_\xi^{d_0}\frac{d\eta}{\check{\mu}(\eta)}\,d\eta<\infty,\quad \int_0^{d_0}\frac{\omega(\check{\mu}(\xi))}{\check{\mu}^{1+2/p}(\xi)}\,d\xi<\infty.$$

*Тогда оператор* $V$ *действует из* $J_{\check{\mu},\,Z(\check{\mu}(\delta),\,\mu,\,\check{\mu},\,\omega)}$ *в* $J_{\check{\mu},\omega}$ *и ограничен.*

Теорема 4. *Если* $(\mu,\check{\mu})\in T_\nu$, $\omega\in\Phi H_\mu$ *и для* $\omega$ *удовлетворяется условие теоремы* 3, *то*

$$V:\ J_{\check{\mu}(\delta),\omega(\check{\mu}(\delta))\frac{\delta}{\mu(\delta)}}\to J_{\check{\mu}(\delta),\,\omega(\delta)}$$

*и ограничен.*

Обозначим

$$Z^{(0)}(\delta)=Z_{d_1}^{d_0}(\check{\mu}(\delta),\,\mu,\,\check{\mu},\,\omega),\qquad Z^{(i)}(\delta)=Z_{d_1}^{d_0}(\check{\mu}(\delta),\,\mu,\,\check{\mu},\,Z^{i-1}),\qquad i=1,\,2,\ldots$$

Теорема 5. *Если* $(\mu,\check{\mu})\in T_\nu$, $Z^i(\delta)\in J_\nu$,

$$\int_0^{d_0}\frac{Z^{i-1}(\xi)}{\check{\mu}^{1+2/p}(\xi)}\,d\xi<\infty,$$

*то* $V: J_{\nu,\,Z^i}\to J_{\nu,\,Z^{i-1}}$ *и ограничен, и следовательно,* $J^\infty_{\nu,\omega}=\bigcap\limits_{i=0}^{\infty}J_{\nu,\,Z^i}$ *инвариантно относительно оператора* $V$.

Заметим, что теорема Векуа — Привалова отличается от классического варианта наличием слагаемого $\delta^{(p-2)/p}$, тогда как теоремы 3—5 полностью совпадают с соответствующими теоремами классической теории.

И, наконец, отметим, что настоящая работа существенно уточняет и обобщает результаты работы ([4]).

Азербайджанский государственный университет
им. С. М. Кирова
Баку

Поступило
17 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. А. Бабаев, В. В. Салаев,* ДАН, т. 209, № 6 (1973). [2] *А. А. Бабаев,* Уч. зап. Азерб. гос. унив., сер. физ.-матем. наук, т. 5, 11 (1965). [3] *И. Н. Векуа,* Обобщенные аналитические функции, М., 1959. [4] *А. Я. Исмайлов, М. Мансуров, В. В. Салаев,* Деп. ВИНИТИ, № 5724-73, 1973. [5] *Л. Г. Магнарадзе,* Сообщ. АН ГрузССР, т. 8, № 8 (1947).