Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 5

УДК 533.951.7

ФИЗИКА

В. И. БОЦМАН, А. В. КАЦ, В. М. КОНТОРОВИЧ

ИНДУЦИРОВАННОЕ РАССЕЯНИЕ И СВЯЗАННЫЕ СПЕКТРЫ ЛЭНГМЮРОВСКОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ И ЧАСТИЦ В ПЛАЗМЕ

(Представлено академиком Б. Б. Кадомцевым 31 V 1974)

Благодаря существованию многочисленных неустойчивостей неравновесная плазма легко переходит в турбулентное состояние, когда в ней оказывается возбужденным большое число волн. При этом в системе волн и частиц могут устанавливаться распределения по энергии, существенно отличающиеся от равновесных и определяемые потоками по спектру от источника волн к их стоку (распределения колмогоровского типа).

Если число волн, возбуждаемых в плазме, не слишком велико, то их взаимодействие носит характер столкновений и может быть описано кинетическими уравнениями, причем возможны ситуации, когда в определенной области энергии преобладает какой-либо один тип столкновений.

Мы рассмотрим такой интервал, когда процесс индуцированного рассеяния (и.р.) ([1]) может оказаться преобладающим во взаимодействии плазмонов и ионов * (рис. 1). В этих условиях ниже получено решение связанной системы кинетических уравнений, определяющей как спектр стационарной плазменной турбулентности, так и распределение частиц. При решении используется автомодельность и свойства симметрии интеграла столкновений ([2], [3]).

И.р. описывается системой кинетических уравнений для функций распределения ионов $n \equiv n_p$ и плазмонов $N \equiv N_k$:

$$\dot{N}_k = I_{li} \equiv \int d\mathbf{k}'\, d\mathbf{p}\, d\mathbf{p}'\, w_{\mathbf{kp}/\mathbf{k}'\mathbf{p}'} f_{\mathbf{kp}/\mathbf{k}'\mathbf{p}'},$$
$$\dot{n}_\mathbf{p} = I_{il} \equiv \int d\mathbf{k}\, d\mathbf{k}'\, d\mathbf{p}'\, w_{\mathbf{kp}/\mathbf{k}'\mathbf{p}'} f_{\mathbf{kp}/\mathbf{k}'\mathbf{p}'}, \tag{1}$$
$$f_{\mathbf{kp}/\mathbf{k}'\mathbf{p}'} = -f_{\mathbf{k}'\mathbf{p}'/\mathbf{kp}} \equiv N_\mathbf{k} N_{\mathbf{k}'} (n_{\mathbf{p}'} - n_\mathbf{p}).$$

Здесь $w_{\mathbf{k}'\mathbf{p}'/\mathbf{kp}} = w_{\mathbf{kp}/\mathbf{k}'\mathbf{p}'} = U_{\mathbf{kp}/\mathbf{k}'\mathbf{p}'} \delta(\mathbf{k}+\mathbf{p}-\mathbf{k}'-\mathbf{p}')\, \delta(\omega_\mathbf{k} - \omega_{\mathbf{k}'} + \varepsilon_\mathbf{p} - \varepsilon_{\mathbf{p}'})$ — вероятность рассеяния плазмонов с законом дипсерсии $\omega_\mathbf{k} = \omega_0(1 + {}^3/_2 (kr_D)^2)$ на ионах $(\varepsilon_\mathbf{p} = {}^1/_2 P^2/m_i)$.

В изотропной плазме величины w и f инвариантны относительно совместного поворота $\hat{g}$ всех векторных аргументов: $\hat{g}w = w$, $\hat{g}f = f$. Будем считать $U_{\mathbf{kp}/\mathbf{k}'\mathbf{p}'}$ однородной функцией степени m. Тогда $w_{\lambda\mathbf{k},\, \lambda\mathbf{p}/\lambda\mathbf{k}',\, \lambda\mathbf{p}'} = \lambda^{m-5} w_{\mathbf{kp}/\mathbf{k}'\mathbf{p}'}$ также является однородной функцией, поскольку плазменная частота выпадает из закона сохранения энергии и $\omega_{\lambda\mathbf{k}} + \varepsilon_{\lambda\mathbf{p}} - \omega_{\lambda\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\lambda\mathbf{p}'} = \lambda^2(\omega_\mathbf{k} + \varepsilon_\mathbf{p} - \omega_{\mathbf{k}'} - \varepsilon_{\mathbf{p}'})$. Это позволяет с помощью замены переменных, осуществляемой преобразованием симметрии $\hat{G}_\mathbf{k}$ (растяжение и поворот, переводящие $\mathbf{k}'$ в $\mathbf{k}$, см. рис. 2*а*), привести I_{li} к виду (ср. ([3])):

$$I_{li} = {}^1/_2 \int d\mathbf{k}'\, d\mathbf{p}\, d\mathbf{p}'\, w_{\mathbf{kp}/\mathbf{k}'\mathbf{p}'} [f_{\mathbf{kp}/\mathbf{k}'\mathbf{p}'} + (k/k')^{7+m} f_{\hat{G}_\mathbf{k}\mathbf{k}'\hat{G}_\mathbf{k}\mathbf{p}'/\hat{G}_\mathbf{k}\mathbf{k}G_\mathbf{k}\mathbf{p}}]. \tag{2}$$

---

* Процесс и. р. в бесстолкновительной плазме ($\nu_{li}, \nu_{ll}, \nu_{le} > \nu_{ee\,эф}, \nu_{il} > \nu_{ii}, \nu_{ie}$) преобладает ($\nu_{li} > \nu_{ll}, \nu_{le}$) при $[(W/n_0T)(m_e/m_i)^{1/2}]^{1/3} > kr_D < (m_e/m_i)^{1/5}$, где для предварительных оценок использованы времена перекачки ν по спектру турбулентности ([4], [5]); уровень турбулентности W ограничен значением $W_{max}/(n_0T) = m_e/m_i$, при котором плазмонами не возбуждается ионный звук ([6]) в интересующей нас области $kr_D > (m_e/m_i)^{1/2}$. В действительности адекватным в постановке задачи является задание не W, а потока (как волн, так и частиц).

Аналогично, с помощью операции G_p (рис. 2б), преобразуем I_{li}. Неравновесные ($f\neq 0$) стационарные распределения, обращающие в ноль интегралы столкновений (1), как следует из (2), можно искать в виде $N_\mathbf{k}=\mathbf{k}^{2s}$, $n_\mathbf{p}=\mathbf{p}^{2t}$ (постоянные множители опускаем). На классе степенных распределений f является однородной функцией и подынтегральное выражение факторизуется $(r=2s+t+{}^1/_2(7+m))$:

$$I_{li}={}^1/_2\int d\mathbf{k}'\,d\mathbf{p}\,d\mathbf{p}'\,wf[1-(k/k')^{2r}],\quad I_{il}={}^1/_2\int d\mathbf{k}\,d\mathbf{k}'\,d\mathbf{p}'\,wf[1-(p/p')^{2r}]. \tag{3}$$

Как видно из (3), оба интеграла столкновений обращаются в нуль, если s и t связаны соотношением $r(s,t)=0$. Таким образом, процесс н.р. определяет лишь связь распределений плазмонов и ионов

$$N_\mathbf{k}=\mathbf{k}^{2s},\qquad n_\mathbf{p}=\mathbf{p}^{-7-m-4s}. \tag{4}$$

Этот результат является основным в данной работе. Для нахождения

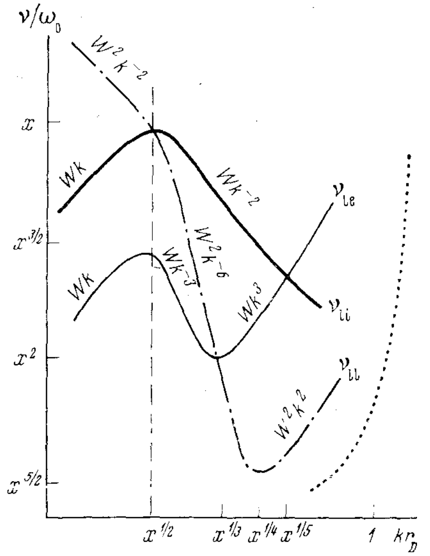

Рис. 1

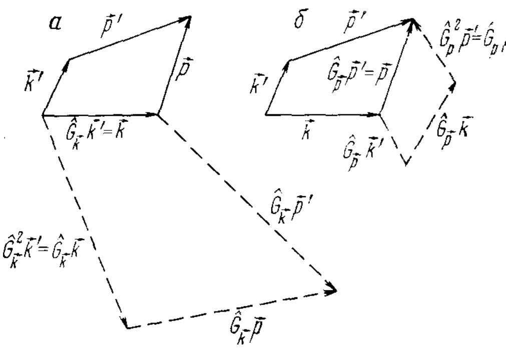

Рис. 2

Рис. 1. Поведение характерных частот столкновений для процессов индуцированного рассеяния плазмонов на ионах (l_i) и электронах (l_e) [4], плазмон-плазмонного расстояния (ll) [5]. Пунктир – граница генерации ионного звука [6]. Точки – затухание Ландау $x=W/(n_0T_e)=m_e/m_i$

Рис. 2. Преобразования $\hat G_\mathbf{k}(\hat G_\mathbf{k}\mathbf{k}'=\mathbf{k})$ и $\hat G_\mathbf{p}(\hat G_\mathbf{p}\mathbf{p}'=\mathbf{p})$, переводящие четырехугольник, выражающий закон сохранения импульса, в ему подобный, с сохранением векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{p}$ соответственно

s (и t) необходимо рассмотреть следующий по скорости процесс в иерархии нелинейных взаимодействий (рис. 1). В длинноволновой* области таким процессом является плазмон-плазмонное рассеяние и в уравнении для $N_\mathbf{k}$ необходим учет слагаемого I_{ll}:

$$I_{ll}=\int d\mathbf{k}_1\,d\mathbf{k}_2\,d\mathbf{k}_3\,w_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1/\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}(N_1N_2N_3+N_\mathbf{k}N_2N_3-N_\mathbf{k}N_1N_2-N_\mathbf{k}N_1N_3).$$

Интеграл I_{ll}, как было показано Захаровым, факторизуется на классе степенных распределений [2] и, таким образом, стационарное распределение найдется подстановкой (4) в уравнение $I_{ll}=0$. Отсюда получаем выражение для s [3]:

$$s_0={}^1/_3-{}^1/_6(9+l),\qquad s_1=-{}^1/_6(9+l),\qquad U_{\lambda\mathbf{k}\lambda\mathbf{k}_1/\lambda\mathbf{k}_2\lambda\mathbf{k}_3}=\lambda^l U_{\mathbf{k}\mathbf{k}_1/\mathbf{k}_2\mathbf{k}_3}, \tag{5}$$

* Из сравнения $\nu_{li},\nu_{ll},\nu_{le}$ [4, 5] область, где $\nu_{li}>\nu_{ll}>\nu_{le}$, задается неравенствами

$$\left(\frac{W}{n_0T}\sqrt{\frac{m_e}{m_i}}\right)^{1/3}<kr_D<\left[\frac{W}{n_0T}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^2\right]^{1/9}.$$

соответствующие постоянному потоку квазичастиц (s_0) и энергии (s_1) по спектру. Численные значения s и t зависят от области существования решений (4), которая определяет значения показателей l и m.

Из законов сохранения в процессе и.р. следует, что области **k** и **p** пространств связаны условием совпадения скорости частиц с групповой скоростью волн (скоростью биений: $v/v_{Te} \approx kr_D$). Из различных возможностей, зависящих от параметров плазмы W и $N_D = n_0 r_D^3$ ограничимся случаем $\nu_{li} > \nu_{ll} > \nu_{le}$ * при $kr_D > (m_e/m_i)^{1/2}$. В этой области $l=-4$ ([5]), $m=0$ ([4]), откуда, согласно (4) и (5), получаем $s_0 = -1/2$, $t_0 = -5/2$, $s_1 = -5/6$, $t_1 = -11/6$. Локальным (в **k**-пространстве) является решение, соответствующее постоянному потоку плазмонов:

$$N_\mathbf{k} = \mathbf{k}^{-1}, \quad n_\mathbf{p} = \mathbf{p}^{-5}. \tag{6}$$

Если же $kr_D < (m_e/m_i)^{1/2}$, то $l=0$ ([5]) и при преобладании l_l-процесса, возможном при $W < W_{\max}$, согласно (4) и (5), приходим к распределению (для постоянного потока плазмонов) $N_\mathbf{k} = k^{-7/3}$; $n_\mathbf{p} = p^{-7/3}$. Распределение плазмонов при этом то же, что и найденное Захаровым ([2]) для $\nu_{ll} > \nu_{li}$. Таким образом, этот спектр не изменяется под воздействием преобладающего и.р., а напротив, формирует распределение ионов.

В коротковолновой области ($\nu_{li} > \nu_{le} > \nu_{ll}$) в систему оказываются включенными электроны и типичным случаем для них является максвелловское распределение ($\nu_{ee} > \nu_{el}$). Аналогичная предыдущему процедура решения кинетических уравнений приводит к спектрам $N_\mathbf{k} = k^{-9/2}$, $n_\mathbf{p} = p^2$. Спектр плазмонов совпадает с найденным Цытовичем ([4]) в условиях $\nu_{le} > \nu_{li}$. Таким образом, и это распределение плазмонов распространяется на область с преобладающим и.р., где оно определяет спектр ионов.

Используя диффузионное приближение для I_{li}:

$$\dot{n}_\mathbf{p} = -\frac{1}{p^2}\frac{\partial}{\partial p}\left(p^2 D \frac{\partial n}{\partial p}\right),$$

нетрудно убедиться, что полученные решения отвечают постоянному потоку в p-пространстве $p^2 D\, \partial n/\partial p = \mathrm{const}$. Решению с «плато» $\partial n/\partial p = 0$ ($f=0$ см. (3)) отвечает поток, равный нулю. Коэффициент диффузии является функционалом от $N_\mathbf{k}$ и обладает свойствами однородности $D(\lambda p) = \lambda^{4s+6} D(p)$ (при $N_\mathbf{k} = k^{2s}$). Степенные распределения в различных интервалах должны сшиваться при условии постоянства потока, параметризующего решения (сами по себе степенные решения не обладают свойством локальности одновременно как в **k**-, так и в **p**-пространствах). Как видно из (4), и.р. при степенном распределении ионов $n_\mathbf{p} = p^{2t}$ формирует степенной спектр плазмонов $N_\mathbf{k} = k^{(-7+m)/2-t}$.

Таким образом, спектры плазмонов и ионов оказываются связанными благодаря и.р. В достаточно широком интервале (от тепловой скорости ионов до тепловой скорости электронов) ионный спектр может существенно отличаться от равновесного. Найденное изменение индекса распределения плазмонов, связанное со сменой преобладающих механизмов рассеяния может служить дополнительным источником информации о параметрах плазмы (это касается в особенности астрофизических приложений).

Рассмотренные условия могут реализоваться в таких физических объектах как корона звезд ([7]), облака H—II ([8]) и лабораторная плазма.

Харьковский научно-исследовательский институт метрологии

Институт радиофизики и электроники Академии наук УССР
Харьков

Поступило
5 V 1974

* Ситуация реализуется при выполнении неравенств

$$\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/2} < kr_D < \left[\frac{W}{W_{\max}}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^3\right]^{1/9} \leqslant \left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/3}.$$

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Б. Б. Кадомцев, В. И. Петвиашвили*, ЖЭТФ, т. 43, 2234 (1962); *W. Drummond, D. Pines*, Nuclear Fusion Suppl., v. 3, 1049 (1962); *Б. Б. Кадомцев*, Сб.: Вопросы теории плазмы, т. 4, М., 1964; *А. А. Галеев, В. И. Карпман, Р. З. Сагдеев*, Ядерный синтез, т. 5, 20 (1965). [2] *В. Е. Захаров*, ЖЭТФ, т. 51, 2, 683 (1966); т. 62, 1745 (1972). [3] *А. В. Кац, В. М. Конторович*, Письма ЖЭТФ, т. 14, 392 (1971); ЖЭТФ, т. 65, 2510 (1973). [4] *В. Н. Цытович*, Нелинейные эффекты в плазме, «Наука», 1967; Теория турбулентной плазмы, М., 1971. [5] *В. А. Липеровский, В. Н. Цытович*, Изв. высш. учебн. завед., Радиофизика, т. 12, 483 (1969). [6] *А. А. Галеев, Р. З. Сагдеев*, Вопросы теории плазмы, т. 7, 1973, стр. 3; *А. А. Веденов, Л. И. Рудаков*, ДАН, т. 159, 767 (1964). [7] *С. А. Каплан, В. Н. Цытович*, Плазменная астрофизика, «Наука», 1972. [8] Сб.: Космическая газодинамика, под ред. Х. Дж. Хабинга, М., 1972.