

В. С. КРЮЧКОВ

**ГРАНИЧНЫЕ ТЕОРЕМЫ ВЛОЖЕНИЯ ДЛЯ КЛАССОВ  
ДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ, СВЯЗАННЫХ  
С ПРОСТРАНСТВАМИ ЛОРЕНЦА**

(Представлено академиком С. М. Никольским 6 VI 1974)

1. Пусть  $R_n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство точек  $x = (x_1, \dots, x_n)$ . Множество измеримых по Лебегу функций  $f(x)$ , для которых конечно выражение

$$\int_0^\infty [t^{1/p} f^{**}(t)]^s \frac{dt}{t} \text{ при } 1 < p < \infty, \quad 1 \leq s < \infty,$$

или

$$\sup_{0 < t < \infty} [t^{1/p} \cdot f^{**}(t)] \text{ при } 1 \leq p \leq \infty, \quad s = \infty,$$

где  $f^{**}(t) = \frac{1}{t} \int_0^t f^*(s) ds$ , а  $f^*(t)$  — равноизмеримая перестановка функции  $f(x)$  в невозрастающем порядке, называется пространством Лоренца  $L_{ps}(R_n)$ . Для измеримой функции  $\omega(x)$  определим пространство  $L_{ps, \omega}(R_n)$  как совокупность всех функций  $f(x)$  таких, что

$$\omega(x) \cdot f(x) \in L_{ps}(R_n).$$

В заметке <sup>(2)</sup> нами были введены новые пространства  $L_{ps}^r(R_n)$ , состоящие из всех функций  $F(x)$ , представимых в виде

$$F(x) = \int_{R_n} G_r(x-t) \cdot f(t) dt,$$

где  $f(t) \in L_{ps}(R_n)$  (ядро  $G_r(x)$  подробно рассмотрено в работе П. И. Лизоркина <sup>(3)</sup>). Там же были получены некоторые свойства пространств  $L_{ps}^r(R_n)$  и доказан ряд теорем вложения для этих пространств.

В данной работе доказываются обратимые граничные теоремы вложения для пространств  $L_{ps}^l(R_n)$ ,  $l$  — целое. При этом приходится вводить новые функциональные пространства  $B_{ps}^o(R_n)$ , обобщающие известные пространства Бесова.

2. **Определение 1.** Пусть  $\rho > 0$  — действительное нецелое число,  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq s < \infty$ . Назовем пространством  $B_{ps}^\rho(R_n)$  совокупность всех измеримых функций  $f(x)$  таких, что  $f(x) \in L_{ps}^{[\rho]}(R_n)$  и конечно выражение

$$\|f\|_{\tilde{B}_{ps}^{\rho-[\varepsilon]}(R_n)} = \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_n = [\varepsilon]} \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\Delta_{he_i} \partial^{[\varepsilon]} f(x) / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}{h^{\rho-[\varepsilon]}} \right\|_{L_{ps, h^{-1/p}}(R_{n+1})},$$

$$\|f\|_{B_{ps}^\rho(R_n)} = \|f\|_{L_{ps}^{[\rho]}(R_n)} + \|f\|_{\tilde{B}_{ps}^{\rho-[\varepsilon]}(R_n)}$$

( $\Delta_{he_i}^k F$  — разность порядка  $k$  с шагом  $h$  по направлению  $e_i$  от функции  $F$ ). Нетрудно видеть, что при  $s=p$  пространства  $B_{ps}^\rho(R_n)$  совпадают с пространствами Бесова  $B_p^\rho(R_n)$ .

Справедлива следующая

Теорема 1. При  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq s < \infty$ ,  $l$  целом имеется непрерывное вложение

$$L_{p_i}^l(R_n) \rightarrow B_{p_s}^{\rho}(R_{n-1}),$$

где  $\rho = l - 1/p$ .

Доказательство. По теореме 2 из (2)  $L_{p_i}^l(R_n)$  с точностью до эквивалентности норм совпадает с пространством

$$(L_{p_1}^l(R_n), L_{p_2}^l(R_n))_{\theta, s},$$

где  $0 < \theta < 1$  и  $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$ , построенным по методу действительной интерполяции. Известно, что оператор взятия следа линейно и ограниченно действует из пространства  $L_{p_i}^l(R_n)$  в пространство  $B_{p_i}^{\rho_i}(R_{n-1})$ ,  $i=1, 2$ , где  $\rho_i = l - 1/p_i$  (см. (3)). Тогда в силу интерполяционной теоремы (см. (2)) он линейно и ограниченно действует из  $L_{p_s}^l(R_n)$  в пространство

$$(B_{p_1}^{l-1/p_1}(R_{n-1}), B_{p_2}^{l-1/p_2}(R_{n-1}))_{\theta, s},$$

где  $0 < \theta < 1$ ,  $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$  и  $1 \leq s < \infty$ .

Докажем, что пространство  $(B_{p_1}^{l-1/p_1}(R_{n-1}), B_{p_2}^{l-1/p_2}(R_{n-1}))_{\theta, s}$  непрерывно вложено в пространство  $B_{p_s}^{l-1/p}(R_{n-1})$ , где  $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$ . Заметим сперва, что

$$[\rho] = [l - 1/p] = l - 1, \quad \rho - [\rho] = 1 - 1/p.$$

Пусть  $\varphi(x_1, \dots, x_{n-1}) \in (B_{p_1}^{\rho_1}(R_{n-1}), B_{p_2}^{\rho_2}(R_{n-1}))_{\theta, s}$ . Тогда в силу соответствующего определения (см. (3))

$$\|\varphi\|_{\theta, s}^s = \int_0^\infty [t^{-\theta} \inf_{\varphi_1 + \varphi_2} (\|\varphi_1\|_{B_{p_1}^{\rho_1}(R_{n-1})} + t \|\varphi_2\|_{B_{p_2}^{\rho_2}(R_{n-1})})]^s \frac{dt}{t},$$

где  $\varphi_1 \in B_{p_1}^{\rho_1}(R_{n-1})$ ,  $\varphi_2 \in B_{p_2}^{\rho_2}(R_{n-1})$ .

Используя последнее выражение для нормы  $\|\varphi\|_{\theta, s}$  нетрудно получить неравенство

$$\|\varphi\|_{\theta, s}^s \geq \|\varphi\|_{L_{p_s}^{l-1}(R_{n-1})}^s + \sum_{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{n-1} = l-1} \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \frac{\Delta_{h e_i} \partial^{l-1} \varphi / \partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}}{h^{l-1/p}} \right\|_{L_{p_s, h-1/p}(R_n^+)}^s,$$

где  $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$ .

Отсюда следует, что если  $\varphi(x)$  принадлежит пространству  $(B_{p_1}^{l-1/p_1}(R_{n-1}), B_{p_2}^{l-1/p_2}(R_{n-1}))_{\theta, s}$ , то  $\varphi(x)$  принадлежит также пространству  $B_{p_s}^{l-1/p}(R_{n-1})$ , где  $1/p = (1-\theta)/p_1 + \theta/p_2$  и

$$\|\varphi\|_{B_{p_s}^{l-1/p}(R_{n-1})} \leq c \|\varphi\|_{\theta, s},$$

что доказывает утверждение теоремы.

3. Доказательству следующей теоремы предположим вспомогательные утверждения.

Лемма 1. Пусть  $f(x_1, \dots, x_n) \in L_{ps}(R_n)$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq s < \infty$ , и пусть задано линейное взаимно однозначное отображение  $R_n$  на себя соотношением

$$u_i = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

с якобианом  $a \neq 0$ .

Тогда функция  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = f(u_1(x), \dots, u_n(x))$  принадлежит  $L_{ps}(R_n)$  и

$$\|\varphi\|_{L_{ps}/R_n} \cong |a|^{-1/p} \|f\|_{L_{ps}/R_n}.$$

При этом константа эквивалентности зависит только от  $p$ .

Предложение 1. Пусть функция  $f(x)$  принадлежит пространству  $B_{ps}^\rho(R_{n-1})$ ,  $0 < \rho < 1$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq s < \infty$ ,  $\rho + 1/p = 1$ . Положим

$$u(x, y) = c_n \int_{R_{n-1}} \frac{y f(t)}{[(x-t)^2 + y^2]^{n/2}} dt, \quad c_n = \frac{\Gamma(n/2)}{(\pi)^{n/2}}.$$

Тогда  $du/dx_i$ ,  $du/dy$  принадлежат  $L_{ps}(R_n^+)$  и справедливо неравенство

$$\frac{\partial u}{\partial y} \Big\|_{L_{ps}(R_n^+)} + \sum_{i=1}^{n-1} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_{ps}(R_n^+)} \leq c \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\Delta_{he_i} f(x)}{h^\rho} \right\|_{L_{ps, h^{-1/p}}(R_n^+)}.$$

Доказательство.

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = c_n \int_{R_{n-1}} \frac{(t_i - x_i) y f(t)}{[(x-t)^2 + y^2]^{(n+2)/2}} dt.$$

Сделаем замену переменных:  $t_i - x_i = h_i$ ,  $i = 1, \dots, n-1$ , и воспользуемся тем, что

$$\int_{R_{n-1}} \frac{h_i y}{[h^2 + y^2]^{(n+2)/2}} dh = 0.$$

Тогда

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = c_n \int_{R_{n-1}} \frac{h_i y [f(x+h) - f(x)]}{[h^2 + y^2]^{(n+2)/2}} dh = \int_{R_{n-1}} \frac{t_i [f(x+ty) - f(x)]}{(t^2 + 1)^{n/2 + 1} y} dt.$$

Выразив разность  $f(x+ty) - f(x)$  через разности по каждой из переменных  $t_i$ , получим

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| &\leq c \int_{R_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} |t_j| | [f(x_1 + t_1 y, \dots, x_j + t_j y, x_{j+1}, \dots, x_{n-1}) - \\ &- f(x_1 + t_1 y, \dots, x_{j-1} + t_{j-1} y, x_j, \dots, x_{n-1}) ] / t_j y | \frac{|t_i| dt}{[t^2 + 1]^{n/2 + 1}}. \end{aligned}$$

По неравенству Минковского и лемме 1

$$\begin{aligned} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L_{ps}(R_n^+)} &\leq c_n \int_{R_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} \left\| \frac{f(x + h e_j) - f(x)}{h} \right\|_{L_{ps}(R_n^+)} \cdot \frac{|t_j|^{-1/p}}{[t^2 + 1]^{(n+1)/2}} dt \leq \\ &\leq c_n \sum_{j=1}^{n-1} \left\| \frac{\Delta_{he_j} f(x)}{h^{1-1/p}} \right\|_{L_{ps, h^{-1/p}}(R_n^+)} \cdot \int_{R_{n-1}} \frac{|H_j|^{-1/p}}{[t^2 + 1]^{(n+1)/2}} dt \leq \\ &\leq c \sum_{j=1}^{n-1} \left\| \frac{\Delta_{he_j} f(x)}{h^\rho} \right\|_{L_{ps, h^{-1/p}}(R_n^+)}. \end{aligned}$$

Оценка нормы  $\left\| \frac{\partial u}{\partial y}(x, y) \right\|_{L_{ps}(R_n^*)}$  проводится аналогично с использова-

нием соотношения

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = c_n \int_{R_{n-1}} \frac{(t^2 - n + 1) [f(x + ty) - f(x)]}{[t^2 + 1]^{n/2 + 1} y} dt.$$

Таким образом, предложение 1 доказано.

Предложение 2. Пусть  $f(x) \in B_{ps}^\rho(R_{n-1})$ ,  $\rho = l - 1/p$ ,  $l$  — натуральное и  $u(x, y)$  та же, что и в предложении 1. Тогда

$$\frac{\partial^l u(x, y)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \partial y^\beta} \in L_{ps}(R_n^+), \quad \alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + \beta = l,$$

и справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \sum_{\alpha_1 + \dots + \alpha_{n-1} + \beta = l} \left\| \frac{\partial^l u(x, y)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_{n-1}^{\alpha_{n-1}} \partial y^\beta} \right\|_{L_{ps}(R_n^+)} \leq \\ & \leq \sum_{\beta_1 + \dots + \beta_{n-1} = l-1} \left\| \frac{\partial^{l-1} f}{\partial x_1^{\beta_1} \dots \partial x_{n-1}^{\beta_{n-1}}} \right\|_{B_{ps}^{l-1/p}(R_n^+)}. \end{aligned}$$

Доказательство предложения 2 существенно использует тот факт, что  $u(x, y)$  — гармоническая функция переменных  $x_1, \dots, x_{n-1}, y$  и опирается на предложение 1.

4. Следующая теорема является обратной по отношению к теореме 1.

Теорема 2. Пусть  $f(x) \in B_{ps}^\rho(R_{n-1})$ ,  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq s < \infty$ ,  $\rho > 0$ ,  $\rho + 1/p = -l > 0$  целое. Положим

$$v(x, y) = \frac{\Gamma(n/2)}{(\pi)^{n/2}} \varphi(y) \int_{R_{n-1}} \frac{yf(t)}{[(x-t)^2 + y^2]^{n/2}} dt,$$

где

$$\varphi(y) = \begin{cases} 1, & 0 \leq y \leq 1; \\ e^{-[(x-1)/(x-2)]^{2e}}, & 1 \leq y \leq 2; \\ 0, & y \geq 2. \end{cases}$$

Тогда функция  $v(x, y)$  принадлежит пространству  $L_{ps}^l(R_n^+)$  и справедливо неравенство

$$\|v(x, y)\|_{L_{ps}^l(R_n^+)} \leq c \|f\|_{B_{ps}^\rho(R_{n-1})}.$$

Доказательство опирается на приведенные выше предложения.

Введение множителя  $\varphi(y)$  вызвано следующим обстоятельством. Известно, что ядро Пуассона есть функция, не суммируемая на бесконечности и, следовательно, если  $f(x)$  принадлежит  $L_{ps}(R_{n-1})$ , то

$$u(x, y) = c_n \int_{R_{n-1}} \frac{yf(t)}{[(x-t)^2 + y^2]^{n/2}} dt$$

уже не принадлежит  $L_{ps}(R_n^+)$ .

Множитель  $\varphi(y)$  обеспечивает принадлежность функции  $v(x, y) = \varphi(y) \cdot u(x, y)$  пространству  $L_{ps}(R_n^+)$ , если  $f(x)$  принадлежит  $L_{ps}(R_{n-1})$ .

Автор выражает искреннюю благодарность проф. П. И. Лизоркину за внимание к данной работе.

Московский инженерно-физический институт

Поступило  
22 V 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> О. В. Бесов, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 60, 42 (1961).  
<sup>2</sup> В. С. Крючков, Тр. Всесоюз. симпозиума по теоремам вложения, Алма-Ата, 1974.  
<sup>3</sup> П. И. Лизоркин, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 105 (1969).  
<sup>4</sup> С. М. Никольский, Приближение функций многих переменных и теоремы вложения, «Наука», 1969.  
<sup>5</sup> P. L. Butzer, H. Berens, Semi-Groups of Operators and Approximation, 1967.