Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 517.946+517.919.2 *МАТЕМАТИКА*

С. Я. ЛЬВИН

ОБ ОДНОМ ВЫРОЖДАЮЩЕМСЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОМ УРАВНЕНИИ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

(Представлено академиком С. Л. Соболевым 11 VI 1974)

Изучаются общие граничные задачи для вырождающегося эллиптического уравнения второго порядка с ограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве X. Скалярные задачи такого типа были подробно рассмотрены в ([1]), задачи в конечномерном пространстве изучались в ([2], [3]). В настоящей работе устанавливаются аналогичные результаты в бесконечномерных пространствах, при этом рассматривается тот случай, когда порядок вырождения может существенно отличаться на разных подпространствах X. Полученные результаты позволяют, как это сделано в ([1]), доказывать разрешимость (после соответствующего сдвига) рассматриваемых задач в ограниченных областях с гладкой границей.

В полосе $E_{n,d}=\{(t,y):\ 0<t<d,\ y\in E_{n-1}\}$ рассматривается задача, определяемая дифференциальным уравнением

$$\mathscr{L}(t,\partial_t,-i\partial_y)v\equiv\partial_t(A^2(t))\partial_t v+B_1\partial_t v+B_2(t,-i\partial_y)\partial_t v+C(t,-i\partial_y)v=\\=\mathscr{F}(t,y) \tag{1}$$

и граничным условием

$$\gamma S(\partial_t,-i\partial_y)v\equiv\gamma\sum_{s=0}^{r}\sum_{|\beta|\leqslant\rho_s}S_{\beta,s}(-i\partial_y)^\beta\partial_t^s v=G(y), \tag{2}$$

где $v(t,y)$ — искомая функция со значениями в комплексном гильбертовом пространстве X; $A(t)$, B_1, $B_2(t,\xi)$, $C(t,\xi)$ — линейные ограниченные (при каждом ξ) операторы в X; $S_{\beta,s}$ — линейные ограниченные операторы, действующие из X в комплексное гильбертово пространство X_1; $\mathscr{F}(t,y)$ и $G(y)$ — функции со значениями в пространствах X и X_1 соответственно; $\xi=(\xi_1,\ldots,\xi_{n-1})\in E_{n-1}$, $\beta=(\beta_1,\ldots,\beta_{n-1})$, $\beta_i\geqslant 0$, $|\beta|=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i$, $\xi^\beta=\xi_1^{\beta_1}\ldots\xi_{n-1}^{\beta_{n-1}}$, γ — оператор перехода к пределу при $t\to+0$.

Обозначим скалярное произведение и норму в X через $(\cdot,\cdot)$ и $|\cdot|$, а норму в X_1 через $|\cdot|_1$. Будем предполагать, что операторы $\mathscr{L}$ и S удовлетворяют приводимым ниже условиям.

Условие 1. Оператор B_1 самосопряжен и имеет ограниченный обратный.

Тогда пространство X распадается в прямую сумму инвариантных относительно B_1 подпространств $X=X_+\oplus X_-$, соответствующих частям спектра оператора B_1, лежащим в правой и левой полуплоскостях соответственно. Пусть P_+ и P_- — проекторы на X_+ и X_-.

Условие 2. $A(t)=\alpha_+(t)P_++\alpha_-(t)P_-$, где $\alpha_+(t)$ и $\alpha_-(t)$ — произвольные скалярные функции, удовлетворяющие условиям $\alpha_\pm(t)>0$ при $0<t\leqslant d$, $\alpha_\pm(0)=0$, $\alpha_\pm^2(t)\in C^{m-1}[0,d]$; m — целое число, $m\geqslant 2$.

Для простоты мы будем рассматривать здесь лишь случай сильного вырождения, т. е. $\gamma\partial_t(A^2(t))=0$.

Условие 3. Операторы $B_2(t,\xi)$ и $C(t,\xi)$ являются однородными полиномами по ξ порядка 1 и 2 соответственно, по t принадлежат $C^{m-2}(0,d]$ и для любой функции $u(t)$ со значениями в X, $u(t)\in C^{m-2}[0,d]$, любого k, $0\leqslant k\leqslant m-2$ и любого $t\in(0, d]$ справедливы оценки

$$\sum_{j+2s=k}|A^j(t)\partial_t^{j+s}B_2(t,\xi)u(t)|^2\leqslant c|\xi|^2\sum_{j+2s\leqslant k}|A^{j+1}(t)\partial_t^{j+s}u(t)|^2,$$

$$\sum_{j+2s=k}|A^j(t)\partial_t^{j+s}C(t,\xi)u(t)|^2\leqslant c|\xi|^4\sum_{j+2s\leqslant k}|A^j(t)\partial_t^{j+s}u(t)|^2.$$

Здесь и далее через c обозначаются различные положительные константы, не зависящие от переменных t, ξ и функций u, v, $\mathscr{F}$ и G.

Условие 3 будет заведомо выполнено, если, например,

$$\alpha_+(t)=\alpha_-(t)=\alpha(t),\quad \alpha(t)\in C^{[(m-2)/2]}[0, d],\quad B_2(t,\xi)=\alpha(t)B_3(t,\xi),$$

операторы $B_3(t,\xi)$ и $C(t,\xi)$ по t принадлежат $C^{m-2}[0, d]$ и являются однородными полиномами по ξ порядка 1 и 2 соответственно.

Условие 4 (условие A-эллиптичности оператора $\mathscr{L}$). Для любых η, $\zeta\in X$, $\xi\in E_{n-1}$, $t\in[0, d]$ справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}[(A(t)\eta,\eta)+(B_2(t,\xi)\eta,\zeta)-(C(t,\xi)\zeta,\zeta)]\geqslant\nu_0[|A(t)\eta|^2+|\xi|^2|\zeta|^2],$$

где постоянная $\nu_0>0$.

Будем говорить, что вырожденный порядок оператора S равен m^*, если степень по τ и ξ многочлена $S(\tau^2,\xi)$ равна m^*. Предполагается, что $m^*\leqslant\leqslant m-2$. Главной частью оператора S назовем оператор

$$\Lambda(\partial_t,-i\partial_y)=\sum_{i=0}^{r}\Lambda^s(-i\partial_y)\partial_t^s,\text{ где }\Lambda_s(\xi)=\sum_{|\beta|=m^*-2s}S_{\beta,s}\xi^\beta.$$

Введем в рассмотрение оператор

$$\Theta(\xi)=\sum_{i=0}^{r}\Lambda_s(\xi)(-B_1^{-1}C(0,\xi))^s,$$

однородный по ξ порядка m^*.

Условие 5. а) Для любого $\xi\in E_{n-1}$, $|\xi|=1$, оператор $\Theta(\xi)P_-$, как оператор, действующий из пространства X_- в X_1, имеет ограниченный обратный.

б) Существует такая константа $c>0$, что для любых $\eta\in X$, $(B_1\eta,\eta)\leqslant0$ и $\xi\in E_{n-1}$, $|\xi|=1$ справедливо неравенство $c|\Theta(\xi)\eta|_1\geqslant|\eta|$.

Заметим, что условие б) эквивалентно условию

б′) Существует такая константа $c>0$, что для любых $\eta\in X$ и $\xi\in E_{n-1}$, $|\xi|=1$ справедливо неравенство $c|\Theta(\xi)\eta|_1^2\geqslant-(B_1\eta,\eta)$.

Определение. Будем обозначать через $H_{k,\alpha}(E_{n,d})$ (k — целое число, $0\leqslant k\leqslant m$) пространство сильно измеримых по Бохнеру функций со значениями в X, имеющих в $E_{n,d}$ обобщенные производные до порядка k, для которых

$$\int_0^d\int_{E_{n-1}}\sum_{j+2s+|\beta|\leqslant k}|(A(t)\partial_t)^j\partial_t^s\partial_y^\beta v(t,y)|^2\,dy\,dt<\infty.$$

Используя преобразование Фурье F_{n-1} по переменным $y\in E_{n-1}$, введем в $H_{k,\alpha}(E_{n,d})$ норму по формуле

$$\|v\|_{k,\alpha}=\left\{\sum_{p+j+2s=k}\int_{E_{n-1}}(1+|\xi|^2)^p\|A^j(t)\partial_t^{j+s}u(t,\xi)\|^2\,d\xi\right\}^{1/2}\tag{3}$$

где $u(t,\xi)=F_{n-1}v$, $\|u(t,\xi)\|^2=\int_0^d|u(t,\xi)|^2dt$.

Через $H^0_{k,\alpha}(E_{n,d})$, где $k\geqslant 2$, обозначим подпространство функций из $H_{k,\alpha}(E_{n,d})$, обращающихся в нуль при $t=d$.

Для функций $G(y)$ со значениями в X_1, определенных на гиперплоскости $t=0$, введем обычным образом пространство С. Л. Соболева $H_s{}^1(E_{n-1})$ с нормой

$$\langle\!\langle G\rangle\!\rangle=\left\{\int\limits_{E_{n-1}}(1+|\xi|^2)^s|F_{n-1}G|_1{}^2\,d\xi\right\}^{1/2}. \tag{4}$$

Рассмотрим оператор $\mathfrak{A}$, действующий из пространства $H^0_{m,\alpha}(E_{n,d})$ в пространство $H_{m-2,\alpha}(E_{n,d})\times H^1_{m-m^*-1}(E_{n-1})$ и определяемый формулой $\mathfrak{A}v=\{\mathscr{L}v,\ \gamma Sv\}$.

Теорема. *Пусть выполнены условия* 1—5 *и функция* $v(t,y)\in H^0_{m,\alpha}(E_{n,d})$ *есть решение задачи* (1), (2). *Тогда*:

1) *справедливы неравенства*

$$c\|v\|^2_{m,\alpha}\leqslant\|\mathscr{F}\|^2_{m-2,\alpha}+\langle\!\langle G\rangle\!\rangle^2_{m-m^*-1}+\|v\|^2_{0,\alpha}\leqslant\frac{1}{c}\|v\|_{m,\alpha}; \tag{5}$$

2) *существует линейный ограниченный оператор* R (*регуляризатор*), *действующий из пространства* $H_{m-2,\alpha}(E_{n,d})\times H^1_{m-m^*-1}(E_{n-1})$ *в пространство* $H^0_{m,\alpha}(E_{n,d})$, *такой, что* $\mathfrak{A}R=I+T$, *где* T — *ограниченный оператор из пространства* $H_{m-2,\alpha}(E_{n,d})\times H^1_{m-m^*-1}(E_{n-1})$ *в пространство* $H_{m,\alpha}(E_{n,d})\times H^1_{m-m^*}(E_{n-1})$.

Наметим основные этапы доказательства. С помощью преобразования Фурье F_{n-1} доказательство теоремы можно свести к установлению соответствующих оценок и построению регуляризатора в пространствах образцов Фурье для задачи

$$\mathscr{L}(t,\partial_t,\xi)u\equiv\partial_t(A^2(t)\partial_t u)+B_1\partial_t u+B_2(t,\xi)\partial_t u+C(t,\xi)u=f(t,\xi),\quad 0<t<d, \tag{6}$$

$$\gamma S(\partial_t,\xi)u\equiv\gamma\sum_{s=0}^{l}\sum_{|\beta|\leqslant\rho_s}S_{\beta,s}\xi^\beta\partial_t{}^s u=g(\xi),$$

при этом пространства функций $H^0_{m,\alpha}(E_{n,d})$, $H_{m-2,\alpha}(E_{n,d})$ и $H^1_{m-m^*-1}(E_{n-1})$ следует заменить на соответствующие пространства образов Фурье этих функций $\tilde{H}^0_{m,\alpha}$, $\tilde{H}_{m-2,\alpha}$ и $\tilde{H}^1_{m-m^*-1}$, нормы в которых определяются формулами (3) и (4).

Введем в рассмотрение оператор $\mathscr{L}_\lambda(t,\partial_t,\xi)$ по формуле

$$\mathscr{L}_\lambda u=\partial_t(A^2(t)\partial_t u)+B_1\partial_t u+\lambda B_2(t,\xi)\partial_t u+[\lambda C(t,\xi)+(\lambda-1)N|\xi|^2\mathrm{I}]u,$$

где $N>0$ — достаточно большое число, $\lambda\in[0,1]$.

Лемма 1. *Пусть оператор* $\mathscr{L}$ *удовлетворяет условиям* 1—4. *Тогда оператор* $\mathscr{L}_\lambda$ *при всех* $\lambda\in[0,1]$ *также удовлетворяет условиям* 1—4 *с константами, не зависящими от* λ, *и для любой функции* $u(t,\xi)\in C^2[0,d]$, $u(d,\xi)=0$ *справедлива оценка*

$$(1+|\xi|^2)\|A\partial_t u\|^2+(1+|\xi|^2)^2\|u\|^2\leqslant\frac{1}{\nu_0{}^2}[\|(\mathscr{L}_\lambda-I)u\|^2-$$

$$-(1+|\xi|^2)(B_1u(0,\xi),\ u(0,\xi))]\leqslant c[\|(\mathscr{L}_\lambda-I)u\|^2+(1+|\xi|^2)|P_-u(0,\xi)|^2].$$

Аналогично пространству $\tilde{H}_s^1$ вводится пространство $\tilde{H}_s$ образов Фурье функций со значениями в X_-, заданных на гиперплоскости $t=0$, норма в которых обозначается через $\langle\cdot\rangle_s$.

Лемма 2. *При выполнении условий леммы 1 для любой функции* $u(t,\xi)\in\overset{0}{\tilde{H}}_{m,\alpha}$ *справедлива оценка*

$$\|u\|^2_{m,\alpha}\leqslant c[\|(\mathscr{L}_\lambda-I)u\|^2_{m-2,\alpha}+\langle P_-u(0,\xi)\rangle^2_{m-1}].$$

Рассмотрим оператор $\mathfrak{A}_\lambda=\{\mathscr{L}_\lambda-I,\ \gamma P_-\}$, $\lambda\in[0,1]$, действующий из пространства $\overset{0}{\tilde{H}}_{m,\alpha}$ в пространстве $\tilde{H}_{m-2,\alpha}\times\tilde{H}_{m-1}$. Из леммы 2, используя доказанную в ([2]) обратимость оператора $\mathfrak{A}_0$, методом продолжения по параметру получаем, что оператор $\mathfrak{A}_\lambda$ обратим для всех $\lambda\in[0,1]$.

Лемма 3. *Существует граничный оператор $S^0(\partial_t,-i\,\partial_y)$ вырожденного порядка m^*, главная часть которого совпадает с $\Lambda(\partial_t,+i\,\partial_y)$, такой, что*

$$\gamma S^0(\partial_t,\ \xi)u=\Theta(\xi)u(0,\ \xi)$$

для любого решения $u(t,\xi)\in\tilde{H}_{m,\alpha}$ уравнения $\mathscr{L}(t,\partial_t,\xi)u-u=0$.

Рассмотрим оператор K_λ, действующий из пространства $\tilde{H}_{m-1}$ в пространство $\tilde{H}^1_{m-1}$: $K_\lambda\Psi=\gamma\Theta(\xi)\mathfrak{A}_\lambda^{-1}\{0,\ \Psi\}$, $\xi=\xi/|\xi|$. Используя лемму 1 и условие 5, методом продолжения по параметру можно показать, что оператор K_λ обратим для всех $\lambda\in[0,1]$.

Для получения (5) представим решение задачи (6) в виде

$$u(t,\ \xi)=u_0(t,\ \xi)+u_1(t,\ \xi),\quad u_1=\mathfrak{A}_1^{-1}\{f_1,\ 0\},$$

$$u_0=\mathfrak{A}_1^{-1}\left\{0,K_1^{-1}\frac{g_0(\xi)}{m^*+|\xi|^{m^*}}\right\},\quad f_1(t,\xi)=f(t,\xi)-u(t,\xi),$$

$$g_0(\xi)=g(\xi)+\gamma[S^0(\partial_t,\ \xi)-S(\partial_t,\ \xi)+m^*\Theta(\xi)]u_0=-\gamma S(\partial_t,\ \xi)u_1.$$

Применяя лемму 2 и неравенство

$$\|u\|^2_{m-2,\alpha}+\langle\!\langle\gamma S^1u\rangle\!\rangle_{m-m^*-1}\leqslant\varepsilon\|u\|^2_{m,\alpha}+c(\varepsilon)\|u\|^2_{0,\alpha},$$

справедливое для граничного оператора S^1 порядка m^*-1 и любых $u(t,\xi)\in\in\tilde{H}_{m,\alpha}$ и $\varepsilon>0$ (см. ([1])), можно получить (5).

Искомый регуляризатор строится по формуле

$$R=F_{n-1}^{-1}R_1F_{n-1},\quad R_1\{f,g\}=u_0+u_1,\quad u_1=\mathfrak{A}_1^{-1}\{f,0\},$$

$$u_0=\mathfrak{A}_1^{-1}\{0,\Psi\},\quad \Psi=K_1^{-1}\frac{1}{m^*+|\xi|^{m^*}}(g-\gamma S(\partial_t,\xi)u_1).$$

Приношу искреннюю благодарность проф. В. П. Глушко за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Воронежский государственный университет
им. Ленинского комсомола

Поступило
30 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *В. П. Глушко*, Тр. Московск. матем. об-ва, т. 23, 113 (1970). [2] *W. P. Gluschko*, Elliptische Differentialalgleichungen, Kolloquium 17–24 Aug., 1969, Berlin, B. 2, Berlin, 1971, S. 119. [3] *Д. А. Величко, В. П. Глушко*, Тр. матем. ф-та Воронежск. ун-та, т. 1, 11 (1970).