Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 5

УДК 517.51 МАТЕМАТИКА

Р. И. ГУРИЕЛАШВИЛИ

О СХОДИМОСТИ И ОГРАНИЧЕННОСТИ В $\psi(L)$ РЯДА ФУРЬЕ МОНОТОННОЙ ФУНКЦИИ

(Представлено академиком Н. И. Мусхелишвили 1 VIII 1974)

Обозначим через M класс неотрицательных и непрерывных функций ψ, для которых $t^{-1}\psi(t)$ не убывает на $(1, \infty)$ и $\psi(2t)=O(\psi(t))$ при $t\to\infty$.

Пусть $\psi\in M$. Через $\psi(L)$ обозначим класс 2π-периодических измеримых функций f, удовлетворяющих условию

$$\int_0^{2\pi} \psi_0 |f| < \infty.$$

Пусть $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ для функции $f\in L$ обозначают соответственно ряд Фурье функции f и его сопряженный ряд (см. [1], стр. 20 и 14), $S_n(f)$ и $\tilde{S}_n(f)$ — n-ые частные суммы соответственно рядов $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$, а $\tilde{f}$ — сопряженную к функции f (см. [1], стр. 401).

Пусть $\psi\in M$, $f\in L$ и $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — некоторая строго возрастающая последовательность натуральных чисел. Скажем, что ряды $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ сходятся (ограничены) в $\psi(L)$ вдоль последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$, если

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi} \psi\circ|S_{n_k}(f)-f| = \lim_{k\to\infty}\int_0^{2\pi} \psi\circ|\tilde{S}_{n_k}(f)-\tilde{f}| = 0$$

$$\left(\sup_k \int_0^{2\pi} \psi\circ|S_{n_k}(f)|<\infty, \quad \sup_k \int_0^{2\pi} \psi\circ|\tilde{S}_{n_k}(f)|<\infty\right).$$

Если при этом $n_k=k$, $k=1, 2, 3, \ldots$, то скажем, что ряды $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ сходятся (ограничены) в $\psi(L)$.

Обозначим через Q класс функций, 2π-периодических и монотонных на открытом интервале $(0, 2\pi)$.

Известно (см. [2], стр. 162, а также [3]), что если функция $\psi\in M$ и $f\in Q\cap\psi(L)$, то $\tilde{f}\in\psi(L)$ в том и только в том случае, когда

$$\int_1^{\infty} t^{-1}\left|\int_0^{2\pi} {}^t f(x)\,dx\right| d\Psi(t) < \infty, \tag{1}$$

где ${}^t f(x)=f(x)$ при $|f(x)|>t$ и ${}^t f(x)=0$ при $|f(x)|\leqslant t$.

Отсюда следует, что если $f\in Q\cap\Psi(L)$, то условие (1) является необходимым для ограниченности рядов $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ в $\Psi(L)$. Однако это условие не является достаточным, что вытекает из следующего утверждения.

Теорема 1. *Пусть* $\Psi\in M$ *и*

$$\varphi(t)=\begin{cases} 0 & \text{при } 0\leqslant t<1, \\ \int_1^t u^{-1}\,d\Psi(u) & \text{при } t\geqslant 1^*. \end{cases} \tag{2}$$

* Пара функций φ и Ψ, связанная соотношением (2), рассматривалась в [2].

Тогда для любой функции $\Phi \in M$, удовлетворяющей условиям $\Psi(t) = O(\Phi(t))$ при $t \to \infty$ и $\varliminf \Phi(t)/t\varphi(t) = 0$:

a) *существует нечетная функция $f \in Q$ такая, что $f \in \Phi(L)$, $\tilde{f} \in \Phi(L)$ и имеет место одно из равенств*

$$\sup_n \int_0^{2\pi} \Psi \circ |S_n(f)| = \infty, \quad \sup_n \int_0^{2\pi} \Psi \circ |\tilde{S}_n(f)| = \infty,$$

а в случае выпуклой Ψ справедливы оба равенства, т. е. ряды $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ неограниченно расходятся в $\Psi(L)$;

b) *в случае выпуклой Ψ существует нечетная функция $g \in Q$ такая, что $g \in \Phi(L)$, $\tilde{g} \in \Phi(L)$, ряды $S(g)$ и $\tilde{S}(g)$ ограничены в $\Psi(L)$ и справедливы неравенства*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \Psi \circ |S_n(g) - g| > 0, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} \Psi \circ |\tilde{S}_n(g) - \tilde{g}| > 0,$$

т. е. ряды $S(g)$ и $\tilde{S}(g)$ ограниченно расходятся в $\Psi(L)$.

Теорема 1 усиливает следующую, хорошо известную теорему Ф. Рисса (см., например, (4), стр. 598): существует функция $f \in L$ такая, что $\tilde{f} \in L$, однако

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |S_n(f) - f| > 0, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |\tilde{S}_n(f) - \tilde{f}| > 0.$$

Она также показывает неусиляемость следующей теоремы: *Пусть выпуклая функция $\psi \in M$, $\psi(0) = 0$, а функция φ определена равенством* (2). *Тогда, если $f \in L\varphi(L)$, то ряды $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ сходятся в $\psi(L)$.*

Эта теорема является обобщением хорошо известной теоремы А. Зигмунда (если $f \in L \ln^+ L$, то ряды $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ сходятся в L (см. (1), стр. 424)) и доказывается с помощью теоремы (4.34), гл. XII книги (5), сформулированный в том виде, в каком она дана в (2) (см. (2), стр. 151, теорема 4), таким же образом, как и теорема А. Зигмунда.

Известен и следующий критерий А. Зигмунда для сходимости ряда Фурье в L: если

$$\omega_1(\delta; f) = o(|\ln^{-1}\delta|) \quad \text{при} \quad \delta \to 0, \tag{3}$$

где $\omega_1(\delta; f)$ — интегральный модуль непрерывности функции f в L (см. (1), стр. 78), то

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |S_n(f) - f| = 0$$

(см. (1), стр. 288, пример 7).

Неусиляемость этого критерия обсуждается в (6), где сформулирована следующая теорема: *Существует функция $f \in L$ такая, что при $\delta \to 0$ $\omega_1(\delta; f) = O(|\ln^{-1}\delta|)$, $\omega_1(\delta; \tilde{f}) = O(|\ln^{-1}\delta|)$, однако*

$$\varlimsup_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |S_n(f) - f| > 0, \quad \varlimsup_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} |\tilde{S}_n(f) - \tilde{f}| > 0.$$

Отсюда, как показано в (6), в частности, следует вторая часть теоремы 1 для функций $\psi(t) = t$ и $\Phi(t) = t(\ln^+ t)^\alpha$, $0 \leqslant \alpha < 1$. (Ограниченность рядов $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ в L следует из условий, наложенных на интегральные модули.)

Заметим, что ни одна из сформулированных выше теорем А. Зигмунда не является следствием другой, так как существует функция $f \notin L \ln^+ L$, удовлетворяющая условию (3); в качестве примера можно взять нечетную убывающую функцию $f\in L$, определенную на $[0, \pi]$ так:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1+\ln\ln x^{-1}}{x\ln^2 x^{-1}\ln^2\ln x^{-1}} & \text{при}\quad 0<x<e^{-4},\\ 0 & \text{при}\quad e^{-4}\leqslant x\leqslant\pi.\end{cases} \tag{4}$$

И, обратно, существует функция $g\in L\ln^+ L$, не удовлетворяющая условию (3). Последнее утверждение можно получить из следующей теоремы.

Теорема 2*. *Пусть непостоянная функция $f\in L$. Тогда для любой неубывающей функции h, определенной в правой окрестности и удовлетворяющей условию $\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=0$, существует такое сохраняющее меру и обратимое преобразование η интервала $[0, 2\pi)$, что $\omega_1(\delta, f)\neq O(h(\delta))$ при $\delta\to 0$.*

Одна из сформулированных выше теорем А. Зигмунда утверждает, что условие $f\in L\ln^+ L$ является достаточным для сходимости рядов $S(f)$ и $\tilde S(f)$ в L. Однако, как показывает пример функции f, определенной равенством (4), условие $f\in L\ln^+ L$ не является необходимым. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно воспользоваться сформулированной выше теоремой из работы ([2]), теоремой (6.14), гл. VII книги ([1]) и тем, что функция f удовлетворяет условию (3).

Заметим также, что и условие (3) не является необходимым для сходимости рядов $S(f)$ и $\tilde S(f)$ в L, ибо, как отмечено выше, существует функция $f\in L\ln^+ L$, которая не удовлетворяет условию (3).

Ниже для функций из Q приводится условие, необходимое и достаточное для сходимости рядов $S(f)$ и $\tilde S(f)$ в $\Psi(L)$.

Теорема 3. ***Пусть выпуклая функция $\Psi\in M$, $\Psi(0)=0$, $f\in Q\cap\Psi(L)$.*** *Если $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то для сходимости рядов $S(f)$ и $\tilde S(f)$ в $\Psi(L)$ вдоль последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{k\to\infty}\int_1^{\infty} t^{-1}\left|\int_0^{2\pi} {}^t f(x)e^{-in_k x}\,dx\right| d\Psi(t)=0.$$

Теорема 4. *Пусть функция $\Psi\in M$, а $f\in Q\cap\Psi(L)$. Если $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ — строго возрастающая последовательность натуральных чисел, то для ограниченности рядов $S(f)$ и $\tilde S(f)$ в $\Psi(L)$ вдоль последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_k\int_1^{\infty} t^{-1}\left|\int_0^{2\pi} {}^t f(x)e^{-in_k x}\,dx\right| d\Psi(t)<\infty.$$

Отметим некоторые следствия из теорем 3 и 4.

Следствие 1. *В условиях теоремы 3, если*

$$\lim_{k\to\infty} n_k\int_{-n_k^{-1}}^{n_k^{-1}} |xf(x)|\,\varphi\circ|f(x)|\,dx=0, \tag{5}$$

где функция φ определена равенством (2), то для сходимости рядов $S(f)$ и $\tilde S(f)$ в $\Psi(L)$ вдоль последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{k\to\infty}\int_1^{\infty} t^{-1}\left|\int_{-n_k^{-1}}^{n_k^{-1}} {}^t f(x)\,dx\right| d\Psi(t)=0.$$

В частности, если f — нечетная функция, то условие (5) является достаточным для сходимости рядов $S(f)$ и $\tilde S(f)$ в $\Psi(L)$ вдоль последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$

* Справедливость теоремы 2 предсказал О. Д. Церетели.

Следствие 2. *В условиях теоремы 4, если*

$$\sup_k n_k \int_{-n_k^{-1}}^{n_k^{-1}} |xf(x)|\,\varphi\circ|f(x)|\,dx < \infty, \tag{6}$$

где функция φ определена равенством (2), *то для ограниченности рядов $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ в $\Psi(L)$ вдоль последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sup_k \int_1^{\infty} t^{-1}\left|\int_{-n_k^{-1}}^{n_k^{-1}} {}^t f(x)\,dx\right| d\Psi(t) < \infty.$$

В частности, если f — нечетная функция, то условие (6) является достаточным для ограниченности рядов $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ в $\Psi(L)$ вдоль последовательности $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.

Заметим, что если для некоторой возрастающей последовательности натуральных чисел ряды $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ сходятся в $\Psi(L)$ вдоль этой последовательности, то отсюда не вытекает сходимость рядов $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ в $\Psi(L)$, что следует из теоремы 1 и следствия 3.

Следствие 3. *Пусть выпуклая функция $\Psi\in M$ и $\Psi(0)=0$. Если нечетная функция $f\in Q\cap\Psi(L)$, то существует такая возрастающая последовательность натуральных чисел, что ряды $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ сходятся в $\Psi(L)$ вдоль этой последовательности.*

Следствие 4. *Пусть выпуклая функция $\Psi\in M$ и $\Psi(0)=0$, а функция $f\in Q\cap\Psi(L)$. Если для некоторого $\alpha\geqslant 0$ функция $x\ln^{-\alpha}x^{-1}[\Psi\circ|f(x)|+\Psi\circ|f(-x)|]$ не убывает в правой окрестности нуля, то для сходимости рядов $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$* в $\Psi(L)$ *необходимо и достаточно*, *чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \int_1^{\infty} t^{-1}\left|\int_{-n^{-1}}^{n^{-1}} {}^t f(x)\,dx\right| d\psi(t) = 0.$$

В частности, если f — нечетная функция, то для сходимости рядов $S(f)$ и $\tilde{S}(f)$ в $\psi(L)$ достаточно, чтобы для некоторого $\alpha\geqslant 0$ функция $x\ln^{-\alpha}x^{-1}\psi\circ|f(x)|$ не убывала в правой окрестности нуля.

Примечание при корректуре. В теореме 3 (теореме 4) условие $A_{n_k}=\int_1^{\infty} t^{-1}\left|\int_0^{2\pi} {}^t f(x)e^{-in_kx}dx\right| d\Psi(t)=o(1)$, при $k\to\infty$ $(\sup\limits_k A_{n_k}<\infty)$, для $n_k=k$, $k=1, 2, 3, \ldots$, эквивалентно следующим двум условиям: $xf(x)\varphi\circ|f(x)|=o(1)$, при $x\to 0$ $(\sup\limits_x |xf(x)|\varphi^\circ|f(x)|<\infty)$, и $B_k=\int_0^1 \Psi\left((1/x)\left|\int_{-x}^{x} f_k(t)\,dt\right|\right)dx=o(1)$, при $k\to\infty$ $(\sup\limits_k B_k<\infty)$, где φ определена равенством (2), а $f_k(x)=f(x)$ при $|x|\leqslant k^{-1}$ и $f_k(x)=0$ при $k^{-1}<|x|\leqslant\pi$.

В случае $\Psi(u)=u$, $u\geqslant 0$, последние два условия эквивалентны следующим: $\int_0^1 (dx/x)\left|\int_{-x}^{x} f(t)\,dt\right|<\infty$ и $C(x)=|xf(x)|\,|\ln|x|^{-1}+\ln|x|^{-1}\left|\int_{-x}^{x} f(t)\,dt\right|=o(1)$, при $x\to 0$ $(\sup\limits_x C(x)<\infty)$.

Тбилисский математический институт
им. А. М. Размадзе
Академии наук ГССР

Поступило
24 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Зигмунд*, Тригонометрические ряды, т. 1, М., 1965. [2] *О. Д. Церетели*, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. 43, 149 (1973). [3] *О. Д. Церетели*, Тр. Тбилисск. матем. ин-та, т. 34, 156 (1968). [4] *Н. К. Бари*, Тригонометрические ряды, М., 1961. [5] *А. Зигмунд*, Тригонометрические ряды, т. 2, М., 1965. [6] *Л. В. Жижиашвили*, ДАН, т. 194, № 4 (1970).