Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 517.43 *МАТЕМАТИКА*

Х. Х. МУРТАЗИН

О ТОЧЕЧНОМ СПЕКТРЕ ОДНОГО КЛАССА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 11 VI 1974)

В настоящей заметке сформулированы теоремы о точечном спектре для дифференциальных операторов, позволяющие определять густоту точечного спектра, частично налегающего на непрерывный спектр, а также характер убывания на бесконечности соответствующих собственных функций.

1. Пусть A — самосопряженный оператор в сепарабельном гильбертовом пространстве H, $\mathscr{H}=\mathscr{L}_2((0,\infty);H)$ — гильбертово пространство вектор-функций со значениями в H, $V(r)=V^*(r)$ — оператор-функция в H, непрерывная в равномерной операторной топологии. В пространстве $\mathscr{H}$ рассмотрим минимальный оператор

$$L_1u=-u''(r)+Au(r)+V(r)u(r),\quad u(0)=0. \tag{1}$$

Справедлива

Теорема 1. *Пусть спектр $S(A)$ оператора A дискретен и состоит из собственных чисел $\{\mu_k\}_{k=1}^\infty$ и пусть $\|V(r)\|\in\mathscr{L}(0,\infty)$. Тогда:*

1) *непрерывный спектр оператора L_1 совпадает с интервалом (γ,∞), где $\gamma=\inf\limits_k \mu_k$, причем интервал (γ,∞) может содержать собственные числа оператора L_1;*

2) *точечный спектр $\sigma(L_1)$ оператора L_1 не имеет предельных точек вне множества $S(A)$;*

3) *если дополнительно выполнено условие $\overline{\lim\limits_{r\to\infty}}\, r^2\|V(r)\|<{}^1/_4$, то $\sigma(L_1)$ не имеет конечных предельных точек;*

4) *если дополнительно выполнено условие $r^2\|V(r)\|\leqslant{}^1/_8$, то*

$$\sigma(L_1)\setminus S(A)=\phi;$$

5) *если $\varphi(r)$ — решение уравнения $L_1\varphi=\lambda_0\varphi$ такое, что $\varphi(0)=0$, $\varphi(r)\in\mathscr{H}$, $\lambda_0\notin S(A)$, то*

$$\|\varphi(r)\|_H\leqslant C\exp(-\delta r), \tag{2}$$

где $\delta=\sqrt{\rho(\lambda_0,S(A))}$, $C>0$ — некоторая постоянная.

Заметим, что утверждения теоремы 1 далее не улучшаемы. В этом легко убедиться, если в качестве $V(r)$ взять оператор умножения на скалярную функцию $q(r)$. Тогда оператор L_1 распадается на скалярные операторы $L_{1k}y=-y''(r)+[\mu_k+q(r)]y(r)$, к которым применимы известные теоремы об осцилляторности и неосцилляторности уравнения Штурма — Лиувилля.

Отсутствие точечного спектра дает также следующая

Теорема 2. *Пусть A — любой самосопряженный оператор в H такой, что $A=\lim\limits_n A_n$ в сильной операторной топологии, где $A_n=A_n^*$ и A_n имеет дискретный спектр при каждом n, $V(r)\geqslant 0$, существует сильная производная $V'(r)\leqslant 0$, $\lim\limits_{r\to\infty}\|V(r)\|=0$. Тогда спектр оператора L_1 абсолютно непрерывен и совпадает с интервалом (γ,∞), где $\gamma=\inf\lambda$, $\lambda\in S(A)$.*

Далее, пусть при некотором $\varepsilon>0$

$$\varphi(r,z)=[(L_1-zI)^{-1}h](r),\quad (1+r)^{(3+\varepsilon)/2}h(r)\in\mathscr{H},\quad z\notin(\gamma,\infty).$$

Тогда функция $\varphi(r, z)$ допускает продолжение на интервале $(\gamma\pm i0, \infty\pm i0)$ и

$$\|(1+r)^{-(3+\varepsilon)/2}\varphi(r, z)\|_{\mathscr{H}}\leqslant (C_0\sqrt{|z|}+C_1)\|(1+r)^{(3+\varepsilon)/2}h(r)\|_{\mathscr{H}}, \qquad (3)$$

где $C_0>0$, $C_1>0$ не зависят от A, $V(r)$, z и $h(r)$.

Примеры. 1) Типичным примером, когда выполнены условия теоремы 1, является эллиптический или гиперболический оператор

$$Mu=-u_{tt}''(x, t)\pm\Delta_x u(x, t)+q(x, t)u(x, t),$$

где $t\geqslant 0$, $u(0, x)=0$, $x=(x_1, \ldots, x_k)\in\mathscr{D}$, $\mathscr{D}$ — ограниченная область в R_k, на границе которой заданы самосопряженные условия для оператора Лапласа Δ. Здесь $H=\mathscr{L}_2(\mathscr{D})$, $\|V(t)\|=\sup\limits_{x\in\mathscr{D}}|q(x, t)|$.

2) Пусть оператор $u_{tt}''\pm\Delta_x u$ задан в области $\tilde{\mathscr{D}}=\{(x, t)\colon x\in\mathscr{D}, t>\varphi(x)\}$, где $\varphi(x)$ — однозначная непрерывная функция. Очевидно, $\tilde{\mathscr{D}}$ — ограниченное или неограниченное возмущение цилиндрической области в R_{k+1}. Пусть на границе области $\tilde{\mathscr{D}}$ заданы нулевые граничные условия. Тогда, пользуясь методикой работы ([3]) автора, изучение этого оператора мы сводим к изучению последовательности операторов вида (1), для которой выполняются условия теоремы 2. Отсюда вытекает, что оператор $u_{tt}''\pm\Delta_x u$ в области $\tilde{\mathscr{D}}$ имеет абсолютно непрерывный спектр, причем неравенство (3) приводит к определенным оценкам для спектральной функции этого оператора.

3) Пусть $\tau(x)$ — произвольная вещественная непрерывная однозначная функция переменной $x=(x_1, \ldots, x_k)$ в R_k. В пространстве точек $(x, t)\in R_{k+1}$ рассмотрим область, ограниченную поверхностью $t=\tau(x)$ и в этой области оператор $u_{tt}''\pm\Delta_x u$ с нулевым граничным условием. Тогда изучение этого оператора сводится к изучению последовательности операторов из примера 2) и, согласно теореме 2, мы приходим к выводу, что в указанной области спектр оператора $u_{tt}''\pm\Delta_x u$ абсолютно непрерывен. Это утверждение для произвольных звездных неограниченных областей доказано в случае оператора Лапласа в работе ([3]) автора.

2. Мы изучаем также точечный спектр оператора

$$L_2 u=(-1)^n\Delta^n u(x)+[Vu](x), \quad x\in R_m, \qquad (4)$$

где V — дифференциальный или интегродифференциальный оператор порядка $\leqslant 2n$, коэффициенты которого подчинены определенным условиям убывания на бесконечности. Не останавливаясь на общем случае, сформулируем наш результат в простейшем случае, когда

$$Vu=q(x)u(x),$$

где $q(x)=\overline{q(x)}$ — непрерывная функция в R_m такая, что

$$|q(x)|\leqslant p(|x|), \quad p(r)>0, \quad p(r)\in\mathscr{L}(0, \infty), \quad \lim_{r\to\infty} rp(r)=0. \qquad (5)$$

Теорема 3. *При условии (5) непрерывный спектр оператора L_2 совпадает с интервалом $[0, \infty)$, который может содержать собственные числа; точечный спектр $\sigma(L_2)$ состоит из ограниченного множества собственных чисел конечной кратности с единственно возможной предельной точкой $\lambda=0$, при этом $\sigma(L_2)$ состоит из конечного числа точек, коль скоро выполнено неравенство*

$$|q(x)|\leqslant C_0(1+|x|)^{-\delta}, \quad \delta>2n. \qquad (6)$$

Сингулярный спектр оператора L_2 состоит из множества $\sigma(L_2)$ и, быть может, точки $\lambda=0$.

Теорема 4. *Пусть $\lambda_0 \neq 0$ — собственное число оператора L_2 (т. е. $\lambda_0 \in \sigma(L_2)$), $\varphi(x)$ — соответствующая собственная функция и в (6) $\delta > ^3/_2$. Тогда*

$$\int\limits_{|x|=r} |\varphi(x)|^2 ds \leqslant C \exp\left(-2|\lambda_0|^{1/n} r \sin\frac{\pi}{n}\right), \tag{7}$$

где $C > 0$ — некоторая постоянная.

Замечания. 1) Из результатов М. Ш. Бирмана ([1]) и С. Т. Куроды ([2]) следует, что условие (6) является оптимальным для конечности отрицательных собственных чисел оператора L_2. Таким образом, теорема 3 дает оптимальное условие конечности точечного спектра в целом.

2) Асимптотические формулы, полученные в книге ([4]), см. стр. 320, показывают, что оценка (7) неулучшаема даже в том случае, когда $q(x)$ зависит лишь от $|x|$.

Заметим в заключение, что при некоторых дополнительных ограничениях на $q(x)$ из (7) можно вывести оценку вида

$$|\varphi(x)| \leqslant C|x|^{-(m-1)/2} \exp\left(-|\lambda_0|^{1/n}|x| \sin\frac{\pi}{n}\right).$$

Башкирский государственный университет
им. 40-летия Октября
Уфа

Поступило
27 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. Ш. Бирман,* Матем. сб., т. 55 (97), 2, 125 (1961). [2] *S. T. Kuroda,* J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. 1, v. 13, № 1, 55 (1966). [3] *Х. Х. Муртазин,* ДАН, т. 215, № 3, 539 (1974). [4] *М. А. Наймарк,* Линейные дифференциальные операторы, изд. 2, «Наука», 1969.