Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 517.12:519.51

МАТЕМАТИКА

Н. Н. НЕПЕЙВОДА

# ЯЗЫК Δ СО СЛАБОЙ ТРЕХЗНАЧНОЙ ЛОГИКОЙ

*(Представлено академиком А. Н. Колмогоровым 7 VI 1974)*

В данной статье продолжается изучение предикативных систем с неограниченным правилом свертки, аналогичных исследовавшимся в статьях ([1-3]). Терминология статей ([2, 3]) используется без дополнительных объяснений.

Д. А. Бочвар поставил перед автором вопрос о системах, подобных рассмотренным в ([1, 2]), но использующих слабую трехзначную логику Клини, а не сильную. Рассмотрим различные семантики языка Δ, приводящие к такой теории.

Определение 1. Ординальная семантика.

Введем одновременным определением индукцией по ординалам понятия «истинно на уровне $\alpha$ $A$» и «ложно на уровне $\alpha$ $A$» (обозначаются $\vDash A\in S_\alpha$ и $\dashv A\in S_\alpha$ соответственно).

а) $\vDash(t=u)\in S_\alpha\Leftrightarrow\zeta\llcorner t\lrcorner\doteq\zeta\llcorner u\lrcorner$,

б) $\dashv(t=u)\in S_\alpha\Leftrightarrow\zeta\llcorner t\lrcorner\neq\zeta\llcorner u\lrcorner$,

в) $\vDash(A\supset B)\in S_{\alpha\oplus 1}\Leftrightarrow(\vDash B\in S_\alpha\dot{\&}\dashv A\in S_\alpha)\dot{\vee}(\vDash B\in S_\alpha\dot{\&}\vDash A\in S_\alpha)\dot{\vee}$
$\dot{\vee}(\dashv B\in S_\alpha\dot{\&}\dashv A\in S_\alpha)$,

г) $\dashv(A\supset B)\in S_{\alpha\oplus 1}\Leftrightarrow\vDash A\in S_\alpha\dot{\&}\dashv B\in S_\alpha$,

д) $\vDash\forall XA\in S_{\alpha\oplus 1}\Leftrightarrow\dot{\forall}n\vDash A(X|n)\in S_\alpha$,

е) $\dashv\forall XA\in S_{\alpha\oplus 1}\Leftrightarrow\dot{\forall}n(\vDash A(X|n)\in S_\alpha\dot{\vee}\dashv A(X|n)\in S_\alpha)\dot{\&}$
$\dot{\&}\exists n\dashv A(X|n)\in S_\alpha$,

ж) $\vDash(t\in Q)\in S_{\alpha\oplus 1}\Leftrightarrow\vDash\rho\llcorner(t\in Q)\lrcorner\in S_\alpha$,

з) $\dashv(t\in Q)\in S_{\alpha\oplus 1}\Leftrightarrow\dashv\rho\llcorner(t\in Q)\lrcorner\in S_\alpha$,

и) $\vDash A\in S_\lambda\Leftrightarrow\exists\beta<\lambda\vDash A\in S_\beta$ ($\lambda$ — предельный),

й) $\dashv A\in S_\lambda\Leftrightarrow\exists\beta<\lambda\dashv A\in S_\beta$ ($\lambda$ — предельный).

Лемма 1. $S_{\omega_1\oplus 1}=S_{\omega_1}$.

Определение 2. Полуформальная система с.п.в. (строго предикативного вывода).

Аксиомы. *Секвенции $\Gamma\to\Theta$, где $\Gamma$ и $\Theta$ состоят из элементарных формул и в $\Gamma$ есть ложная элементарная формула или в $\Theta$, есть истинная элементарная формула.*

Правила вывода.

$$\supset\to\frac{\Gamma\to\Theta A\quad B\Gamma\to\Theta}{(A\supset B)\Gamma\to\Theta}\qquad\to\supset\frac{A\Gamma\to\Theta B}{\Gamma\to\Theta(A\supset B)}$$

$$\forall^0\to\frac{A(|X|0)\Gamma\to\Theta\quad A(X|1)\Gamma\to\Theta\ldots A(X|n)\Gamma\to\Theta\ldots}{\forall XA\Gamma\to\Theta}$$

$$\forall\to\frac{A(X|t)\,\forall XA\Gamma\to\Theta}{\forall XA\Gamma\to\Theta}$$

$$\to\forall\frac{\Gamma\to\Theta A(X|0)\ldots\Gamma\to\Theta A(X|n)\ldots}{\Gamma\to\Theta\forall XA}$$

$$\in\to\frac{\rho\llcorner(t\in Q)\lrcorner\Gamma\to\Theta}{(t\in Q)\Gamma\to\Theta}\qquad\to\in\frac{\Gamma\to\Theta\rho\llcorner(t\in Q)\lrcorner}{\Gamma\to\Theta(t\in Q)}$$

В этой системе два нефинитных правила $\forall^0\to$ и $\to\forall$. Оба они понимаются конструктивно в том смысле, что выводы посылок должны быть перечислимы общерекурсивной функцией. Тогда мы можем сделать вывод в системе с.п.в. финитным объектом, заменяя правила с бесконечным числом посылок схемами о.р.ф., задающих их посылки. Фиксируем некоторую гёделеву нумерацию выводов в системе с.п.в.

Лемма 2. *Существует п.р.ф.* Spr (*стандартное доказательство*), *такая, что* $\mathrm{Spr}\llcorner\Gamma\to\Theta\lrcorner$ *является гёделевым номером вывода в с.п.в.* $\Gamma\to\Theta$ *тогда и только тогда, когда* $\Gamma\to\Theta$ *выводима в с.п.в.*

Идея доказательства леммы следующая. Сначала при помощи оператора Red теоремы 2 статьи [1] строим доказательство $\Gamma\to\Theta$ в системе статей [1, 2], а затем при помощи правила $\forall^0\to$ «раскалываем» все неэлементарные формулы, входящие в аксиомы системы п.в., на элементарные.

Теорема 1. $\models A\in S_{\omega_1}\Leftrightarrow\vdash_{\text{с.п.в.}}\to A$;

$$\Dashv A\in S_{\omega_1}\Leftrightarrow\vdash_{\text{с.п.в.}}A\to.$$

Определение 3. Реализуемость.

Сначала определим понятие «$A$ законно на уровне $\alpha$» ($[J]_\alpha A$).

1a) $[J]_\alpha(t=u)$;

2a) $[J]_{\alpha\oplus1}(A\supset B)\Leftrightarrow[J]_\alpha A\dot{\&}[J]_\alpha B$;

3a) $[J]_{\alpha\oplus1}\forall XA\Leftrightarrow\dot\forall n[J]_\alpha A(X|n)$;

4a) $[J]_{\alpha\oplus+1}(t\in Q)\Leftrightarrow[J]_\alpha\rho\llcorner(t\in Q)\lrcorner$;

5a) $[J]_\lambda A\Leftrightarrow\dot\exists\beta<\lambda[J]_\beta A$ ($\lambda$ — предельный).

Теперь определим понятие «$n$ реализует на уровне $\alpha$ формулу $A$» ($n[R]_\alpha A$).

1) $n[R]_\alpha(t=u)\Leftrightarrow\zeta\llcorner t\lrcorner\dot=\zeta\llcorner u\lrcorner$;

2) $n[R]_{\alpha\oplus1}(A\supset B)\Leftrightarrow[J]_{\alpha\oplus1}(A\supset B)\dot{\&}\dot\forall m(m[R]_\alpha A\Rightarrow$
$\Rightarrow!\langle n\rangle(m)\&\langle n\rangle(m)[R]_\alpha B)$;

3) $n[R]_{\alpha\oplus1}\forall XA\Leftrightarrow[J]_{\alpha\oplus1}\forall XA\dot{\&}\dot\forall m(!\langle n\rangle(m)\dot{\&}\langle n\rangle(m)[R]_\alpha A(X|m))$;

4) $n[R]_{\alpha\oplus1}(t\in Q)\Leftrightarrow f_n^1(0)[R]_\alpha\rho\llcorner(t\in Q)\lrcorner$;

5) $n[R]_\lambda A\Leftrightarrow\dot\exists_{\beta<\lambda}n[R]_\beta A$ ($\lambda$ — предельный).

Лемма 3. *Существует такая п.р.ф. SR* (*стандартная реализация*), *что* $SR(A)[R]_\alpha A$ *тогда и только тогда, когда существует такое* $n$, *что* $n[R]_\alpha A$.

Теорема 2. $SR(A)[R]_\alpha A\Leftrightarrow\models A\in S_\alpha$;

$$SR(A)[R]_{\alpha\oplus1}\neg A\Leftrightarrow\Dashv A\in S_\alpha.$$

Таким образом, все три рассматриваемые семантики эквивалентны между собой.

$\models A$ будет означать $\models A\in S_{\omega_1}$, $\Dashv A$ — $\Dashv A\in S_{\omega_1}$.

Рассмотрим иерархию формул языка $\Delta$ для случая слабой трехзначной логики.

Усовершенствуем определение формул с $\alpha$ переменами кванторов, данное в [3]. Дадим определение классов предваренных формул $\Pi_\alpha^\Delta$ и $\Sigma_\alpha^\Delta$, обобщающих классы $\Pi_n$ и $\Sigma_n$ иерархии Клини — Мостовского.

1) Если $\rho^x\llcorner A\lrcorner$ при всех $x$ имеет один из видов $(t=u)$, $(t\in Q)$, $\forall XB$ $(\neg\forall X\neg B)$, то $A\in\Pi_0^\Delta$ $(A\in\Sigma_0^\Delta)$.

2) Если $\dot\forall n\ A(X|n)\in\Pi_\alpha^\Delta$, то и $\forall XA\in\Pi_\alpha^\Delta$.

3) Если $\dot\forall n\ A(X|n)\in\Sigma_\alpha^\Delta$, то и $\neg\forall X\neg A\in\Sigma_\alpha^\Delta$.

4) Если $\rho\llcorner(t\in Q)\lrcorner\in\Pi_\alpha^\Delta$ $(\Sigma_\alpha^\Delta)$, то и $(t\in Q)\in\Pi_\alpha^\Delta$ $(\Sigma_\alpha^\Delta)$.

5) Если $A\in\Pi_\alpha^\Delta\cup\Sigma_\alpha^\Delta$ и $\alpha<\beta$, то $A\in\Pi_\beta^\Delta\cap\Sigma_\beta^\Delta$.

Все результаты об иерархии статьи [3] переносятся на эту иерархию.

В случае слабой трехзначной логики также имеют место результаты, подобные результатам статьи [3]. А именно, справедливы следующие утверждения.

Лемма 4. *Для всякого предикатора $M$ можно примитивно-рекурсивно построить предваренный предикатор $N$ такой, что*

$$\vDash (n\in M) \Leftrightarrow \vDash (n\in N),$$
$$\dashv (n\in M) \Leftrightarrow \dashv (n\in N).$$

Теорема 3. *Пусть $M$ — предикатор. Если существует такой предикатор $N\in\Pi_\alpha^\Delta$ $(\Sigma_\alpha^\Delta)$, что*

$$\vDash (n\in M) \Rightarrow \vDash (n\in N),$$
$$\dashv (n\in M) \Rightarrow \dashv (n\in N),$$

*то по этому предикатору, $\alpha$ и $M$ можно примитивно-рекурсивно построить предикатор $K\in\Pi_\alpha^\Delta$ $(\Sigma_\alpha^\Delta)$ такой, что*

$$\vDash (n\in M) \Leftrightarrow \vDash (n\in K),$$
$$\dashv (n\in M) \Leftrightarrow \dashv (n\in K).$$

Теорема 4. *Пусть $M\in\Pi_\alpha^\Delta$ $(\Sigma_\alpha^\Delta)$. Тогда по $M$ и $\alpha$ можно примитивно-рекурсивно построить предикатор $N\in\Pi_\alpha^\Delta$ $(\Sigma_\alpha^\Delta)$ такой, что*

$$\vDash \forall x (x\in N \supset x\in N)$$

*и*

$$\vDash (n\in M) \Rightarrow \vDash (n\in N),$$
$$\dashv (n\in M) \Rightarrow \dashv (n\in N).$$

Отметим, что в этой системе случай $\Pi_0^\Delta$ и $\Sigma_0^\Delta$ не является особым, как это было в системе статьи ([3]).

Эквивалентность между классами $\Pi_\alpha^\Delta$ и $\Sigma_\alpha^\Delta$ семантик данной работы и работы ([3]) устанавливает следующее утверждение.

Пусть $\vDash_C A$ и $\dashv_C A$ означают истинность и ложность $A$ в «сильной» семантике работ ([2]) и ([3]). Тогда справедлива

Теорема 5. *По всякому предикатору $M$ можно примитивно-рекурсивно построить предикаторы $N$ и $K$ такие, что*

$$\vDash (n\in M) \Leftrightarrow \vDash_C (n\in N),$$
$$\dashv (n\in M) \Leftrightarrow \dashv_C (n\in N),$$
$$\vDash_C (n\in M) \Leftrightarrow \vDash (n\in K),$$
$$\dashv_C (n\in M) \Leftrightarrow \dashv (n\in K),$$

*и если $M\in\Pi_\alpha^\Delta$ $(\Sigma_\alpha^\Delta)$ и $\alpha>0$, то и $N$, и $K$ принадлежат тому же самому классу $\Pi_\alpha^\Delta$ $(\Sigma_\alpha^\Delta)$.*

Итак, выразительная сила языка $\Delta$ от замены сильной трехзначной логики на слабую трехзначную не изменяется.

Удмуртский государственный университет
Ижевск

Поступило
31 V 1974

## ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Н. Н. Непейвода*, Математические заметки, т. 13, № 5 (1973). [2] *Н. Н. Непейвода*, ДАН, т. 212, № 1 (1973). [3] *Н. Н. Непейвода*, ДАН, т. 212, № 2 (1973).