

Член-корреспондент АН СССР В. В. КАФАРОВ, И. Н. ДОРОХОВ,
Л. Н. ЛИПАТОВ

**СТАТИСТИЧЕСКИЙ МЕТОД ПРОВЕРКИ ГИПОТЕЗ
О ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЕ ПОТОКОВ
В ТЕХНОЛОГИЧЕСКИХ АППАРАТАХ**

Естественной характеристикой гидродинамической обстановки в технологическом аппарате служит его весовая функция $K(t)$ ⁽¹⁻³⁾, которая статистически интерпретируется как функция распределения элементов потока по времени пребывания в аппарате. В этом смысле весовая функция полностью характеризует линейную систему. В связи с этим задача синтеза интегрального оператора объекта сводится, во-первых, к дискриминации гидродинамической структуры потоков, т.е. к установлению характера весовой функции, адекватно отражающей гидродинамику потоков в аппарате, и, во-вторых, к идентификации найденного оператора, т.е. к определению численных значений входящих в него параметров.

Применение для решения второй задачи квадратичных критериев приводит к исследованию обобщенных решений в задачах минимизации квадратичного функционала вида

$$I(K) = (LK, LK) - 2(LK, u) \quad (1)$$

или, что равносильно, к решению уравнения Фредгольма первого рода ⁽⁴⁾

$$L^*LK = L^*u, \quad (2)$$

где

$$LK = \int_0^{T_1} K(\tau)x(t-\tau)d\tau, \quad L^*u = \int_0^T u(t)x(t-\tau)d\tau.$$

Здесь скалярное произведение определяется в пространстве $L_2[0, T]$; объект с весовой функцией $K(t)$ имеет конечную память T_1 ; $x(t)$ — входной сигнал; $u(t)$ — наблюдаемый сигнал на выходе системы; T — интервал наблюдения системы; t — время.

Настоящая работа посвящена решению первой задачи синтеза оператора, в частности, предлагается новый, сравнительно простой, но эффективный метод выбора математической модели потоков в аппаратах на основе вероятностно-статистических характеристик моделируемых систем.

Эффективный инструмент при анализе различного типа неоднородностей в потоках представляет функция интенсивности $\lambda(t)$, которая определяется следующим образом ⁽²⁾: количество потока $QK(t)dt$, покидающее аппарат за период времени от t до $t+dt$ (Q — объемный расход потока), равно количеству этого потока $V\mathcal{I}(t)$, которое не покинуло систему до момента t (V — объем системы), умноженному на долю потока возраста t , которая покинет аппарат в течение следующего промежутка времени $(t, t+dt)$ и обозначается $\lambda(t)dt$:

$$QK(t)dt = V\mathcal{I}(t)\lambda(t)dt \quad (3)$$

или

$$\lambda(t) = \frac{K(t)}{\bar{t}\mathcal{I}(t)} = -\frac{d}{dt} \ln[\bar{t}\mathcal{I}(t)]. \quad (4)$$

№ модели	Вид модели гидродинамической структуры потоков	Уравнения	Функция веса	κ -Функция
1	Идеальное перемешивание	$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{\bar{t}}(y_0 - y)$	$K(t) = \exp(-t/\bar{t})$	$\kappa(t) = 1/\bar{t}$
2	Ячеечная модель а) $n = 1$ б) $1 < n < \infty$ в) $n \rightarrow \infty$ (n — число ячеек)	$\frac{\bar{t}}{n} \frac{dy_i}{dt} = y_{i-1} - y_i$ $i = 1, 2, \dots, n$	а) $K(t) = \exp(-t/\bar{t})$ б) $K(t) = \frac{n^n}{(n-1)!} \frac{1}{\bar{t}} \left(\frac{t}{\bar{t}}\right)^{n-1} \exp\left(-\frac{nt}{\bar{t}}\right)$ в) $K_\infty(t) = \delta(t - \bar{t})$	а) $\kappa(t) = 1/\bar{t}$ б) $\kappa(t) = \frac{\bar{t} + n(t - \bar{t})}{t \cdot \bar{t}}$ в) $\kappa_\infty(t) = \begin{cases} \infty, & t = \bar{t} \\ 0, & t \neq \bar{t} \end{cases}$
3	Идеальное вытеснение	$w \frac{\partial y}{\partial z} + \frac{\partial y}{\partial t} = 0$	$K(z, t) = \delta(z - wt)$	$\kappa(z, t) = \begin{cases} \infty, & t = z/w \\ 0, & t \neq z/w \end{cases}$
4	Поршневой поток с продольным перемешиванием (аппарат бесконечных размеров)	$D \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} - w \frac{\partial y}{\partial z} - \frac{\partial y}{\partial t} = 0$	$K(z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left[-\frac{(z - wt)^2}{4Dt}\right]$	$\kappa(z, t) = \frac{2D + w^2 t^2 - z^2}{4Dt^2}$
5	Диффузионная модель с застойными зонами (аппарат бесконечных размеров; F_1, F_2 — доля проточной и застойной зон соответственно)	$F_1 \frac{\partial y_1}{\partial t} = F_1 D \frac{\partial^2 y_1}{\partial z^2} - F_1 w \frac{\partial y_1}{\partial z} + F_2 \frac{\partial y_2}{\partial t}; F_2 \frac{\partial y_2}{\partial t} = k_{33}(y_1 - y_2)$	$K(z, t) = (4\pi Dt)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(z - wt)^2}{4Dt}\right] + \int_0^{t-\tau} \int_0^{\tau} [4\pi D(t - \tau - \theta)]^{-1/2} \exp\left\{-\frac{[z - w(t - \tau - \theta)]^2}{4D(t - \tau - \theta)}\right\} \times \exp\left[-\frac{k_{33}}{F_1}(t - \tau - \theta)\right] \frac{k_{33}}{F_2} (4\pi D\tau)^{-1/2} \times \exp\left(-\frac{k_{33}\theta}{F_2}\right) \exp\left[-\frac{(z - w\tau)^2}{4D\tau}\right] d\tau d\theta$	$\kappa(z, t) = \frac{1}{K(z, t)} \frac{dK(z, t)}{dt}$
6	Диффузия в неподвижной среде	$D \frac{\partial^2 y}{\partial z^2} = \frac{\partial y}{\partial t}$	$K(z, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}} \exp\left(-\frac{z^2}{4Dt}\right)$	$\kappa(z, t) = \frac{2Dt - z^2}{4Dt}$

Примечание. y — концентрация растворенного вещества; z — пространственная координата; \bar{t} — среднее время пребывания; k_{33} — коэффициент обмена между проточной и застойной зоной; w — линейная скорость потока.

Здесь $\mathcal{S}=1-F(t)$, $F(t)$ — функция отклика системы на единичное ступенчатое возмущение, \bar{t} — среднее время пребывания. Физически $\lambda(t)$ есть мера вероятности выхода частицы потока из аппарата, которая находилась в нем в течение времени t .

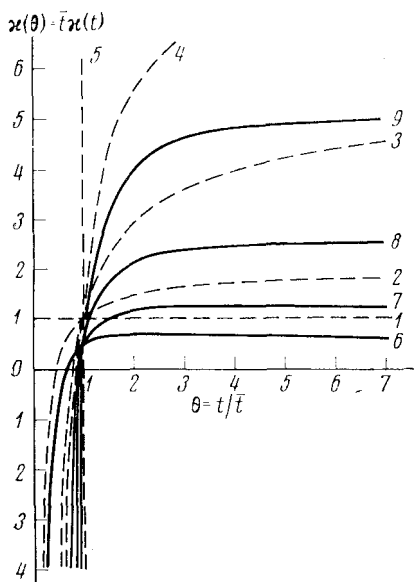


Рис. 1

Рис. 1. κ -Функции интенсивности для моделей № 2 (пунктирные) и № 4 (сплошные линии) табл. 1. 1 — $n=1$, 2 — $n=2$, 3 — $n=5$, 4 — $n=10$, 5 — $n \rightarrow \infty$, 6 — $Re=2$, 7 — $Re=5$, 8 — $Re=10$, 9 — $Re=20$ ($Re=wl/D$)

Рис. 2. λ -Функции интенсивности для модели № 2 табл. 1. 1 — $n=1$, 2 — $n=2$, 3 — $n=3$, 4 — $n=5$, 5 — $n \rightarrow \infty$

Рис. 3. Весовые (1, 2, 3) и соответствующие им κ -функции интенсивности (1', 2', 3') насадочной колонны. 1, 1' — экспериментальные кривые; 2, 2' — кривые, рассчитанные по модели № 5 и 3, 3' — кривые, рассчитанные по модели № 4 табл. 1

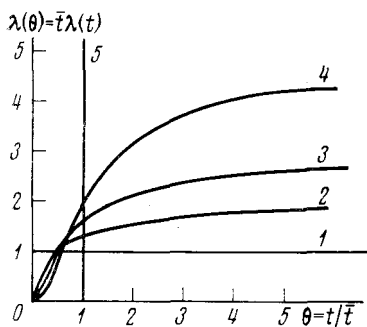


Рис. 2

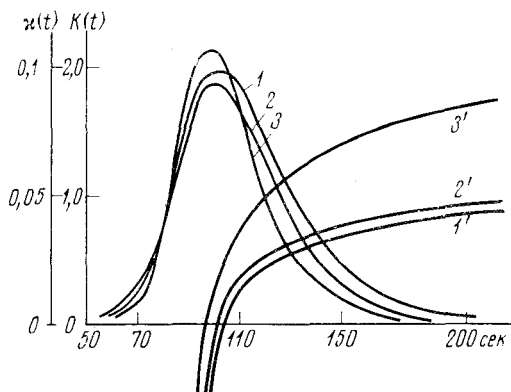


Рис. 3

Введем в рассмотрение κ -функцию интенсивности, которую определим как линейную комбинацию λ -функции и ее логарифмической производной

$$\kappa(t) = \lambda(t) - \frac{d}{dt} \ln \lambda(t). \quad (5)$$

Из (5) видно, что κ -функция отражает не только интенсивность гибели (удаления из аппарата) частиц потока, но и скорость изменения логарифма этой интенсивности. Отсюда следует ожидать, что κ -функция интенсивности не менее чувствительна к гидродинамической обстановке в аппарате, чем λ -функция. Другое толкование κ -функции можно получить, подставляя (4) в (5):

$$\kappa(t) = -\frac{1}{K(t)} \frac{dK(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \ln K(t), \quad (6)$$

т.е. κ -функция есть логарифмическая производная от функции плотности распределения элементов потока по времени пребывания в аппарате (или, что то же, весовой функции системы).

Из сравнения (4) и (6) видно, что аналитические выражения κ -функций для важнейших типов структур потоков в аппаратах получаются значительно проще, чем для λ -функций.

Повышенная чувствительность κ -функции к гидродинамической структуре потоков в технологических аппаратах позволяет предложить следующую методику дискриминации гидродинамической модели: 1) дискриминация модели осуществляется путем качественного сравнения экспериментальной κ -функции с набором теоретических κ -функций в классе стандартных; 2) количественная оценка близости к данному классу выбранной таким образом весовой функции производится путем проверки гипотезы о законе распределения с помощью методов математической статистики; 3) окончательное установление адекватности модели реальному объекту осуществляется в результате исследования функционала (1).

Аналитические выражения для весовых функций и κ -функций важнейших типовых операторов, используемых при моделировании гидродинамической структуры потоков в аппаратах химической технологии, приведены в табл. 1. Функции веса для моделей №№ 1, 2, 3 табл. 1 получены на основе прямого и обратного преобразования Лапласа по переменной t ; для моделей №№ 4, 6 — на основе двумерного преобразования Лапласа для случая задачи Коши по двум переменным t и z ; для модели № 5 — путем сведения задачи к интегральному уравнению Фредгольма первого рода. Графики соответствующих κ -функций показаны на рис. 1. Для сравнения на рис. 2 приведены графики λ -функций для некоторых операторов. Из сравнения рис. 1 и 2 видно, что форма κ -функций чувствительнее к гидродинамической обстановке в аппаратах, чем форма λ -функций.

Для иллюстрации приведенного материала рассмотрим приближенный метод дискриминации математической модели структуры потока жидкой фазы в насадочной колонне. На рис. 3 изображена экспериментальная весовая функция насадочной колонны. По этой экспериментальной кривой была выполнена идентификация моделей №№ 4 и 5 табл. 1. Графики весовых функций этих моделей и соответствующие им κ -функции изображены на рис. 3. Из сравнения κ -функций можно сделать вывод, что математическая модель с застойной зоной в большей степени отвечает реальной структуре потока. Для количественной проверки этой гипотезы использовался критерий χ^2 Пирсона. Вычисление критерия χ^2 выполнялось по 16 точкам весовой функции; $m=16$. Результаты проверки для степеней свободы $N=m-1-1$ (условие несмещенности в оценке χ^2 и идентификация модели по одному параметру D уменьшают число степеней свободы на 2 единицы), для которой $\chi^2=21,064$, были в пользу модели с застойной зоной с процентной вероятностью достоверности $q=10\%$; расчетное значение критерия $\chi^2=9$. Расчетное значение критерия χ^2 для модели № 4 равно 19.

Московский химико-технологический институт
им. Д. И. Менделеева

Поступило
9 X 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ В. В. Кафаров, Методы кибернетики в химии и химич. технол., изд. 2, М., 1971.
² И. Н. Дорохов, Процессы и аппараты химической технологии, т. 1, Математическое моделирование гидродинамической структуры потоков в насадочных колоннах, М., 1973. ³ Л. П. Лунаров, Типовые процессы химической технологии как объекты управления, 1973. ⁴ Ю. П. Леонов, ДАН, т. 206, № 1 (1972).