

Академик Н. Н. КРАСОВСКИЙ, А. И. СУББОТИН, В. Ф. РОССОХИН

**СТОХАСТИЧЕСКИЕ СТРАТЕГИИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ**

Рассматриваются стохастические процедуры управления (с.п.у.), которые доставляют аппроксимационное решение дифференциальной игры сближения — уклонения и раскрывают реальное содержание ее идеализированных формализаций <sup>(1, 2)</sup>. Такая аппроксимация обосновывается при условии независимости либо слабой зависимости случайных управлений каждого из игроков от управлений партнера, реализуемых в текущий момент времени. Это условие выводится из достаточно общего предположения о наличии информационных помех. Аппроксимационное решение игровых задач определяется в форме с.п.у. с поводьрем <sup>(1, 2)</sup>.

Опишем с.п.у. с поводьрем в задаче о сближении с множеством  $M$  внутри множества  $N$  к моменту  $\theta$ . Пусть движение управляемой системы описывается условиями <sup>(1, 2)</sup>

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad x(t_0) = x_0, \quad u \in P, \quad v \in Q. \quad (1)$$

Наряду с системой (1) рассматривается вспомогательная система-поводьрь

$$\dot{w} = \iint f(t, w(t), u, v) \mu^{[i]}(du) \nu^{[i]}(dv), \quad (2)$$

$$\tau_i^{(1)} \leq t < \tau_{i+1}^{(1)}, \quad i = 0, 1, \dots$$

Здесь и в дальнейшем буквами  $\mu$  и  $\nu$  обозначаются вероятностные меры, заданные на измеримых пространствах  $(P, \mathcal{B}(P))$  и  $(Q, \mathcal{B}(Q))$  соответственно, где  $\mathcal{B}(F)$  есть  $\sigma$ -алгебра борелевских подмножеств множества  $F$ ;

$\Delta^{(1)} = \{[\tau_i^{(1)}, \tau_{i+1}^{(1)}] : i = 0, 1, \dots\}$  — некоторое разбиение полуоси  $[t_0, \infty)$ , выбранное первым игроком. Управления — меры  $\mu^{[i]}$  и  $\nu^{[i]}$  в системе (2), как и управление  $u$  в системе (1), выбираются первым игроком; этот выбор будет указан ниже. Управляемая система, которая складывается из реальной системы (1) и вспомогательной системы (2), называется информационной системой  $\Sigma$  первого игрока, а ее движение  $(x(t), w(t))$ , реализовавшееся на отрезке  $[t_0, t_*]$ , — состоянием  $h(t_*)$  системы  $\Sigma$  к моменту времени  $t_*$ .

Полагаем, что для любых  $h_* > t_0$  и  $h(t_*) \in C_n[t_0, t_*] \times C_n[t_0, t_*]$  задано вероятностное пространство  $(R^{2n}, \mathcal{B}(R^{2n}), \xi(dy|t_*, h(t_*)))$  сигналов  $y = (x^*(t_*), w(t_*))$ . Случайный выбор  $y$  трактуется как операция наблюдения за движением  $h(t_*) = \{(x(t), w(t)) : t_0 \leq t \leq t_*\}$ . Предполагаем при этом, что не точно восстанавливается лишь фазовая точка  $x(t_*)$  системы (1) (с ошибкой  $\Delta x(t_*) = x^*(t_*) - x(t_*)$ ), а фазовая точка  $w(t_*)$  модели (2) определяется им без погрешностей. Полагаем также, что задано вероятностное пространство  $(R^n, \mathcal{B}(R^n), \kappa)$  начальных состояний  $w_0$  системы (2). Случайный выбор  $w_0$  трактуется как измерение первым игроком начального состояния  $x_0$ , т. е. здесь  $w_0 = x^*(t_0)$ ,  $y(t_0) = (w_0, w_0) = (x^*(t_0), x^*(t_0))$ . Ниже предполагается, что для любых  $t_* \geq t_0$  и  $G \in \mathcal{B}(R^{2n})$  отображение  $r(h(t_*)) = \xi(G|t_*, h(t_*))$  является борелевым и справедливы оценки

$$\int \|y_0(t_*) - y\| \xi(dy|t_*, h(t_*)) \leq \beta, \quad t_* \geq t_0, \quad h(t_*) \in C_n[t_0, t_*] \times C_n[t_0, t_*], \quad (3)$$

$$\int \|x_0 - w_0\|^2 \kappa(dw_0) \leq \beta,$$

где  $y_0(t_*) = (x(t_*), w(t_*))$ ,  $\|g\|$  — евклидова норма вектора  $g$ .

Опишем формирование движений  $x(t)$  и  $w(t)$ . Пусть  $W_{(u)}^{(\phi)}$  — некоторый  $\bar{u}$ -стабильный мост в задаче о сближении,  $\bar{U}_e \div \mu_e(du|t, w)$  — стратегия, экстремальная к этому мосту <sup>(1, 2)</sup>. Введем функции  $\mu^0(du) = \mu^0(du|t, y)$ ,  $\nu^*(dv) = \nu^*(dv|t, y)$ , выбранные из условий

$$\begin{aligned} \max_{\nu} \iint (x^* - w)' f(t, w, u, v) \mu^0(du|t, y) \nu(dv) = \\ = \min_{\mu} \max_{\nu} \iint (x^* - w)' f(t, w, u, v) \mu(du) \nu(dv), \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \min_{\mu} \iint (x^* - w)' f(t, w, u, v) \mu(du) \nu^*(dv|t, y) = \\ = \max_{\nu} \min_{\mu} \iint (x^* - w)' f(t, w, u, v) \mu(du) \nu(dv), \end{aligned} \quad (5)$$

причем для любых  $t \geq t_0$ ,  $G \in \mathcal{B}(P)$  и  $D \in \mathcal{B}(Q)$  функции  $r_1(w) = \mu_e(G|t, w)$ ,  $r_2(y) = \mu^0(G|t, y)$ ,  $r_3(y) = \nu^*(D|t, y)$  являются борелевыми. Возможность построения таких функций  $\mu_e$ ,  $\mu^0$ ,  $\nu^*$  выводится, например, из результатов работ <sup>(3, 4)</sup>. Пусть  $y_i = y(\tau_i^{(1)})$  — сигнал, который реализовался в случайном испытании, отвечающем вероятностному пространству  $(R^{2n}, \mathcal{B}(R^{2n}), \xi(dy|\tau_i^{(1)}, h(\tau_i^{(1)})))$ , где  $h(\tau_i^{(1)})$  — состояние системы  $\Sigma$ , реализовавшееся к моменту  $t = \tau_i^{(1)}$ . Этот сигнал определяет вероятностное пространство  $(P, \mathcal{B}(P), \mu^0(du|\tau_i^{(1)}, y_i))$  управлений  $u[t] = u_i$ ,  $\tau_i^{(1)} \leq t < \tau_{i+1}^{(1)}$ , в системе <sup>(1)</sup>. Эти управления в паре с некоторыми реализациями  $v[t]$  управления второго игрока порождают движения  $x(t)$  при  $t \in [\tau_i^{(1)}, \tau_{i+1}^{(1)})$ . Одновременно моделируется движение  $w(t)$  системы <sup>(2)</sup>, порожденное управлениями — мерами  $\mu^{[i]}(du) = \mu_e(du|\tau_i^{(1)}, w(\tau_i^{(1)}))$ ,  $\nu^{[i]}(dv) = \nu^*(dv|\tau_i^{(1)}, y_i)$ . Указанная с.п.у. осуществляется последовательно на промежутках  $[\tau_i^{(1)}, \tau_{i+1}^{(1)})$ ,  $i = 0, 1, \dots$

Опишем с.п.у., допустимую для второго игрока в рассматриваемой задаче о сближении. Подчеркнем, что введенные ниже предположения не дискриминируют противника, т.е. в рамках этих предположений он располагает возможностями, не меньшими, чем те, которые предоставлены первому игроку в с.п.у. с поводырем. Полагаем, что второй игрок располагает информационной системой  $\Sigma$ , которая определена следующими условиями. Для любого  $t \geq t_0$  задано пространство  $H_t^{(2)}$  состояний  $h^{(2)}$  системы  $\Sigma^{(2)}$  в момент времени  $t$ . Для любых  $t_1, t_2, t_2 \geq t_1 \geq t_0$ , и  $h^*(2) \in H_{t_1}^{(2)}$  задано множество

(область достижимости)  $H^{(2)}(h^*(2), t_1, t_2) \subset H_{t_2}^{(2)}$ . Для любой точки  $h_0^{(2)} \in H_{t_0}^{(2)}$

существует функция  $h(t)$ ,  $t \geq t_0$  (движение системы  $\Sigma^{(2)}$ ), такая, что  $h^{(2)}(t_0) = h_0^{(2)}$  и  $h^{(2)}(t_2) \in H^{(2)}(h^{(2)}(t_1), t_1, t_2)$ , каковы бы ни были  $t_1, t_2, t_2 \geq t_1 \geq t_0$ . Задано вероятностное пространство  $(H_{t_0}^{(2)}, \mathcal{B}_{t_0}, \kappa^{(2)})$  начальных состояний  $h_0^{(2)}$  системы  $\Sigma^{(2)}$ . Для  $t \geq t_0$ ,  $h^{(2)} \in H_t^{(2)}$  задано вероятностное пространство  $(Y_t^{(2)}, \mathcal{B}_t^*, \xi^{(2)}(dy^{(2)}|t, h^{(2)}))$  сигналов  $y^{(2)}$ . Случайный выбор  $y^{(2)} \in Y_t^{(2)}$  трактуется как неточное измерение вторым игроком реализовавшегося состояния  $h^{(2)}$  системы  $\Sigma$ . Предполагается, что для любых  $t \geq t_0$  и

$G \in \mathcal{B}_i^*$  функция  $r(h^{(2)}) = \xi^{(2)}(G|t, h^{(2)})$  измерима относительно  $\mathcal{B}_i$ , где  $\mathcal{B}_i$  — некоторая  $\sigma$ -алгебра множеств из  $H_i$ .

Полагаем далее, что вторым игроком выбрана функция  $v^0(dv) = v^0(dv|t, y^{(2)})$ , определенная при  $t \geq t_0$  и  $y^{(2)} \in Y_t^{(2)}$ , причем при любых  $t \geq t_0$ ,  $G \in \mathcal{B}(Q)$  функция  $r(y^{(2)}) = v^0(G|t, y^{(2)})$  измерима относительно  $\mathcal{B}_i^*$ . Управление  $v$  в системе (1) формируется вторым игроком следующим образом. Пусть  $\Delta^{(2)} = \{\tau_j^{(2)}, \tau_{j+1}^{(2)} : j=0, 1, \dots\}$  — покрытие полуоси  $[t_0, \infty)$ , выбранное вторым игроком. В каждый из моментов времени  $t = \tau_j^{(2)}$  производится случайный выбор сигнала  $y_j^{(2)}$  отвечающий вероятностному пространству  $(Y_{\tau_j^{(2)}}^{(2)}, \mathcal{B}_{\tau_j^{(2)}}^*, \xi^{(2)}(dy^{(2)} | \tau_j^{(2)}, h^{(2)}(\tau_j^{(2)})))$ , где  $h^{(2)}(\tau_j^{(2)})$  — состояние системы  $\Sigma^{(2)}$ , реализованное в момент  $t = \tau_j^{(2)}$ . Этот сигнал определяет вероятностное пространство  $(Q, \mathcal{B}(Q), v^0(dv | \tau_j^{(2)}, y_j^{(2)}))$  управлений

$v[t] = v_j$ ,  $\tau_j^{(2)} \leq t < \tau_{j+1}^{(2)}$ . Предполагается, что в с.п.у. второго игрока движения информационной системы  $\Sigma^{(2)}$  коррелированы некоторым образом с движениями реальной системы либо даже с движениями системы  $\Sigma(1), (2)$ , т. е. для любых  $t \geq t_0$  и  $h(t) \in C_n[t_0, t] \times C_n[t_0, t]$  задано вероятностное пространство  $(H_t^{(2)}, \mathcal{B}_t, \xi(dh^{(2)}(t) | t, h(t)))$  состояний  $h^{(2)}(t)$  системы  $\Sigma^{(2)}$  при условии, что в системе  $\Sigma(1), (2)$  реализовалось состояние  $h(t)$ ; при этом предполагается, что для любых  $t \geq t_0$  и  $G \in \mathcal{B}_t$  отображение  $r(h(t)) = \xi(G|t, h(t))$  является борелевым.

Введенные предположения о существовании регулярных условных вероятностей используются для формализации рассматриваемых задач в соответствии со стандартами теории вероятностей. Содержательно эти предположения не сужают круг задач, которые можно включать в предлагаемую схему, так как на деле эти задачи позволяют дискретизировать используемые здесь вероятностные конструкции и тогда указанные предположения всегда будут выполнены.

В отличие от предыдущих, чисто технических условий, сформулированное ниже условие имеет смысл физического ограничения: при выполнении этого условия второй игрок не может достаточно быстро и точно восстанавливать реализующееся управление первого игрока.

**Основное условие.** Существует неотрицательная функция  $\alpha(\delta)$ ,  $\alpha(\delta) \rightarrow 0$  при  $\delta \rightarrow 0$ , такая, что, каковы бы ни были числа  $t_*$  и  $\delta$ , ( $t_* \geq t_0, \delta > 0$ ), и точки  $h_*^{(2)} \in H_{t_*}^{(2)}$  и  $h_{**}^{(2)} \in H^{(2)}(h_*^{(2)}, t_*, t_* + \delta)$ , справедливо разложение

$$\begin{aligned} & \xi^{(2)}(dy^{(2)} | t_* + \delta, h_{**}^{(2)}) = \\ & = (1 - \alpha(\delta)) \xi_*(dy^{(2)} | t_*, \delta, h_*^{(2)}) + \alpha(\delta) \xi_{**}(dy^{(2)} | t_*, \delta, h_*^{(2)}, h_{**}^{(2)}), \end{aligned} \quad (6)$$

где  $\xi_*$  и  $\xi_{**}$  — некоторые вероятностные меры на  $(Y_{t_* + \delta}^{(2)}, \mathcal{B}_{t_* + \delta}^*)$ , причем для любых  $t_* \geq t_0, \delta > 0$  и  $G \in \mathcal{B}_{t_* + \delta}^*$  функция  $r(h^{(2)}) = \xi_*(G|t_*, \delta, h^{(2)})$  измерима относительно  $\mathcal{B}_{t_*}^*$ . При этом в моменты  $\tau_i^{(1)} = \tau_j^{(2)}$  полагаем сигналы  $y_i$  и  $y_j^{(2)}$  взаимно независимыми и управления  $u_i$  и  $v_j$  также взаимно независимыми. (Не исключается, что аналогичное условие (6) выполняется и в с.п.у. с поводырем первого игрока.) При указанных предположениях с.п.у. с поводырем первого игрока и допустимая с.п.у. второго игрока индуцируют вероятностное пространство движений.

При рассмотрении задачи об уклонении от множества  $M$  внутри множества  $N$  вплоть до момента  $\theta$  аналогичным образом с понятной инверсией

вводится с.п.у. с поведением второго игрока и допустимая с.п.у. первого игрока. Перейдем к формулировке основного результата. Введем некоторые обозначения. Для замкнутого множества  $D \subset R^{n+1}$  и непрерывной вектор-функции  $x(t)$ ,  $t \geq t_0$ , полагаем  $\tau(x(\cdot), D) = \min \{t: (t, x(t)) \in D\}$ . В задаче о сближении символом  $p^*(\varepsilon, \vartheta, \mathcal{U}, \mathcal{V})$  обозначим вероятность выполнения соотношений

$$\tau(x(\cdot), M^\varepsilon) \leq \vartheta, \quad (t, x(t)) \in N^\varepsilon \text{ при } t_0 \leq t \leq \tau(x(\cdot), M^\varepsilon) \quad (7)$$

для движений  $x(t)$ , порожденных с.п.у.  $\mathcal{U}$  с поведением второго игрока и некоторой допустимой с.п.у.  $\mathcal{V}$  второго игрока. Здесь  $M^\varepsilon$  и  $N^\varepsilon$  — замкнутые  $\varepsilon$ -окрестности множеств  $M$  и  $N$ ,  $\vartheta \geq t_0$  — некоторый момент времени. В задаче об уклонении символом  $p_*(\varepsilon, \vartheta, \mathcal{U}, \mathcal{V})$  обозначим вероятность выполнения условия

$$(t, x(t)) \in G_\varepsilon \text{ при } t_0 \leq t \leq \min \{\vartheta, \tau(x(\cdot), D_\varepsilon)\} \quad (8)$$

для движений  $x(t)$ , порожденных с.п.у.  $\mathcal{V}$  с поведением второго игрока и некоторой допустимой с.п.у.  $\mathcal{U}$  первого игрока. Здесь  $G_\varepsilon$  и  $D_\varepsilon$  — дополнения к открытым  $\varepsilon$ -окрестностям множеств  $M$  и  $N$ . Отметим, что величины  $p^*$  и  $p_*$  определены корректно, поскольку соотношения (7) и (8) выделяют множества, принадлежащие  $\sigma$ -алгебре вероятностного пространства движений  $x(t)$ ,  $t \geq t_0$ .

Выберем в задаче о сближении некоторый  $\tilde{u}$ -стабильный мост  $W_u^{(\tilde{u})}$ , экстремальную к нему стратегию  $\tilde{U}_\varepsilon$  и функции  $\mu^0$  (4),  $\nu^*$  (5). Набор этих элементов с.п.у. с поведением первого игрока обозначим символом  $S_u$ . Обозначим символом  $\Gamma_u(S_u, \beta, \delta)$  совокупность с.п.у. с поведением первого игрока, в которой зафиксирован  $S_u = (W_u^{(\tilde{u})}, \tilde{U}_\varepsilon, \mu^0, \nu^*)$ , выполняются условия (3) и неравенство  $\sup(\tau_{i+1}^{(1)} - \tau_i^{(1)}) \leq \delta$ . Полагаем

$$\gamma^*(\vartheta, S_u) = \inf_{\varepsilon > 0} \lim_{\beta + \delta \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{U} \in \Gamma_u(S_u, \beta, \delta)} \inf p^*(\varepsilon, \vartheta, \mathcal{U}, \mathcal{V}), \quad (9)$$

где  $\mathcal{V}$  — любые допустимые с.п.у. второго игрока. В задаче об уклонении полагаем

$$\gamma_*(\vartheta, S_u) = \sup_{\varepsilon > 0} \lim_{\beta + \delta \rightarrow 0} \inf_{\mathcal{V} \in \Gamma_v(S_u, \beta, \delta)} \inf p_*(\varepsilon, \vartheta, \mathcal{U}, \mathcal{V}); \quad (10)$$

здесь  $\mathcal{U}$  — любые допустимые с.п.у. первого игрока,  $\Gamma_v(S_u, \beta, \delta)$  — совокупность с.п.у. с поведением второго игрока, в которых зафиксирован набор  $S_v = (W_u^{(\tilde{u})}, \tilde{V}_\varepsilon, \nu^0, \mu^*)$ , выполняются условия (3) и неравенство

$$\sup(\tau_{j+1}^{(2)} - \tau_j^{(2)}) \leq \delta. \text{ Справедлива}$$

*Теорема. Каковы бы ни были замкнутые множества  $M \subset R^{n+1}$  и  $N \subset R^{n+1}$  и момент  $\vartheta \geq t_0$ , всегда либо в задаче о сближении существует  $S_u^*$ , для которого  $\gamma^*(\vartheta, S_u^*) = 1$ , либо в задаче об уклонении существует  $S_v^*$ , для которого  $\gamma_*(\vartheta, S_v^*) = 1$ .*

В заключение отметим, что сформулированное в общей форме основное условие (6) выполняется для типичных случаев информационных помех, например, для помех измерения состояния или истории движения системы (1), распределенных равномерно в некотором шаре либо распределенных по нормальному закону, для помех типа постоянного или случайного запаздывания.

Институт математики и механики  
Уральского научного центра Академии наук СССР  
Свердловск

Поступило  
25 XI 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> Н. И. Красовский, Техн. кибернетика, № 2, 3 (1973). <sup>2</sup> Н. И. Красовский, А. И. Субботин, Позиционные дифференциальные игры, М., 1974. <sup>3</sup> К. Kuratowski, C. Ryll-Nardzewski, Bull. Acad. Polon des sci., Varsovie, v. 13, № 6 (1965). <sup>4</sup> А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров, Теория экстремальных задач, М., 1974.