Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 517.54 *МАТЕМАТИКА*

В. В. САВИН

ОБ ОДНОМ ОТОБРАЖЕНИИ ШАРА В ПРОСТРАНСТВО

(Представлено академиком М. А. Лаврентьевым 6 VI 1974)

В обзоре проблем квазиконформных отображений М. А. Лаврентьева и П. П. Белинского [1] было указано существование постоянной $k_1=k_1(n)$ такой, что q — квазиконформный образ шара $|x|<1$ для $q<k_1$ не может быть всюду плотным в пространстве R^n. Известно, что $k_1(3)<\pi/2$. В настоящей заметке указывается более точная граница для k_1.

Пусть $y=f(x)$ — квазиконформный гомеоморфизм области $D\subset R^n$, внешняя и внутренняя дилатации которого равны $K_0(f)=\sup\limits_R \dfrac{\operatorname{mod} f(R)}{\operatorname{mod} R}$ и $K_1(f)=\sup\limits_R \dfrac{\operatorname{mod} R}{\operatorname{mod} f(R)}$ $\bar R\subset D$ — кольцо $\operatorname{mod} R<\infty$ (см. [2]), $K(f)=\max\{K_0(f), K_1(f)\}$. Коэффициенты квазиконформности области D равны $K_0(D)=\inf\limits_f (K_0(f))$, $K_1(D)=\inf\limits_f (K_1(f))$, $K(D)=\inf\limits_f (K(f))$, f — гомеоморфизм D на шар $|x|<1$.

Т е о р е м а. *Для любого произвольно малого $\varepsilon>0$ существует квазиконформный гомеоморфизм f полицилиндра $P_n=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\,|\,|x_1|<\infty, x_2^2+\ldots+x_n^2<1\}$ в пространство R^n, сколь угодно близкий к конформному, что для любой точки $x\in R^n$, $e(f(P_n), x)<\varepsilon$, где e — эвклидова метрика в R^n.*

Прямое следствие теоремы: $k_1(n)<K(P_n)$. Известно $K_1(P_3)\geqslant 2^{1/6}$, $K_0(P_3)=1{,}14,\ldots$, т. е. $k_1(3)<1{,}14\ldots$ (см. [2]).

Л е м м а 1. *Пусть f — гомеоморфизм области D на D' в R^2, D_3 и D_3' — области в R^3, полученные вращением D и D' относительно оси Ox_1 в R^3, если для получаемого отображения f_3: $D_3\to D_3'$ $K(f_3)<\infty$, то $K(f_n)\leqslant K(f_3)^{(2n-3)/3}$, где f_n — отображение D_n на D_n', полученное последовательным вращением D_3 и D_3' относительно оси Ox_1 в R^n.*

Д о к а з а т е л ь с т в о леммы основано на вычислении $K_0(f_n)$ и $K_1(f_n)$ с использованием величины полуосей бесконечно малого эллипсоида $E(y)$ — образа бесконечно малой сферы с центром в точке x при отображении $y=f_n(x)$ (см. [3]): $K_1(f_n)=\max\limits_x \dfrac{a_1\ldots a_n}{a_1^n}$, $K_0(f_n)=\max\limits_x \dfrac{a_n^n}{a_1\ldots a_n}$, где $a_1\leqslant a_2\leqslant\ldots\leqslant a_n$ — величины полуосей $E(y)$. Пусть $L(f_n)=\max\limits_x (a_n/a_1)$ — линейная дилатация отображения f_n. Так как $K(f_0)<\infty$, то $0<a_1\leqslant a_2\leqslant a_3<<\infty$. В силу определения f_n, среди $a_1,\ldots,a_n$ будем иметь $n-2$ одинаковых числа, соответствующих полуосям $E(y)$, возникающим при вращении плоской области вокруг оси Ox_1, т. е. при переходе от f_{n-1} к f_n. В любой точке $x\in D_{n-1}$ с системой полуосей $a_1\leqslant\ldots\leqslant a_{n-1}$, в этой же точке, принадлежащей D_n с системой полуосей для f_n, $a_1'\leqslant\ldots\leqslant a_n'$; последняя система полуосей целиком содержит предыдущую. Если в точке $x\in D_{n-1}$ достигается $K(f_{n-1})$, то в этой же точке $x\in D_n$ достигается и $K(f_n)$, $n>3$.

Теперь заметим

$$K^2(f_n)\geqslant K_0(f_n)\cdot K_1(f_n)\geqslant (a_n/a_1)^n=(a_3/a_1)^n,$$

откуда

$$K(f_n) \geqslant (a_3/a_1)^{n/2} = L(f_n)^{n/2}, \quad a_3/a_1 \leqslant K(f_3)^{2/3},$$

$$K_0(f_n) = K_0(f_3)\,(a_3/a_i)^{n-3} \leqslant K_0(f_3)\,(a_3/a_1)^{n-3},$$

где $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3$ — система полуосей, реализующая $K_0(f_3)$, неравенство для $K_1(f_n)$ аналогично.

Рассматривая полицилиндр P_n и шар $|x|<1$ как области D_n и D_n' в лемме 1, получим для f_n: $P_n \to (|x|<1)$: $L(f_n) = L(f_3)$. Таким образом, если f — отображение P_n на $|x|<1$, на котором достигается $K(P_n)$, то имеет место неравенство $L(f) \leqslant L(f_3) < (1{,}14)^{2/3}$.

В доказательстве теоремы используется специальный класс областей: шпили $S \subset R^n$, которые подобным преобразованием отображаются на область $S_n = \{x = (r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, x_1) \mid r < g(x_1),\ 0 < x_1 < a < \infty\}$ в цилиндрических координатах. Аналогично ([2]) требуем: функция $g(t)$ непрерывна в $[0, a]$, $g(a) = 0$, $g'(t)$ непрерывно убывает в $(0, a)$, $\lim\limits_{t\to a} g'(t) = 0$. В качестве $g(t)$ можно взять $(t-a)^\alpha$, $\alpha > 1$; подбором соответствующего α можно обеспечить необходимую скорость убывания $g(t)$. Из ([2]), см. теорему 10.2, известен результат: для любого произвольно малого $\varepsilon > 0$ существует $(1+\varepsilon)$-квазиконформный гомеоморфизм S_3 на P_3. Этот результат справедлив для $n > 3$, если заметить, что S_n и P_n можно получить из S_3 и P_3 вращением в R^n и применить лемму 1.

Л е м м а 2. *Для любого сколь угодно малого* $\varepsilon > 0$ *существует* $x_0 \in (0, a)$, *что часть шпиля* S_n, *расположенную в полупространстве* $x_1 > x_0$, *можно* $(1+\varepsilon)$-*квазиконформно отобразить на трубчатую окрестность кривой кривизны* $1/\varepsilon$, *т. е. можно изгибать с малыми характеристиками.*

Для доказательства достаточно рассмотреть случай $n=3$. Отображение изгибания цилиндра $\{(x, y, z) \mid (x+r)^2 + y^2 < r^2,\ z \in (0, R)\}$ в часть тора, полученного вращением круга радиуса r вдоль окружности радиуса R, лежащей в xOz-плоскости, определим в виде $f(x, y, z) = \{(R-r+x)\cos(z/R),\ y,\ (R-r+x)\sin(z/R)\}$. Стандартные вычисления, проведенные для малого $r < R$, дадут: $K(f) = 1 + r/R + o(r/R)$. В силу свойства шпиля $\lim\limits_{t\to a} g'(t) = 0$, для $\varepsilon < 1$ существует $x_0 \in (0, a)$, где $g(t) < \varepsilon^2$ для $t \in (x_0, a)$, остается взять $R = \varepsilon$. Возьмем шпиль $S = \{x = (r, \theta_1, \ldots, \theta_{n-2}, x_1) \mid r < g(x_1) < 1,\ -{}^1/_4 < x_1 < \infty\}$. По лемме 2 существует $x_0 \in (0, \infty)$, что часть шпиля S в полупространстве $x_1 > x_0$ можно $(1+\varepsilon)$-квазиконформно отобразить на трубчатую окрестность кривой кривизны $1/\varepsilon$. Ввиду бесконечной протяженности шпиля S, эту кривую можно с наперед заданной протяженностью сосредоточить вблизи сферы $|x| = x_0$.

Произведем инверсию f_1 относительно сферы $|x| = x_0$, получим $R^n \cup (\infty) \setminus f_1(S)$ — ограниченное множество, лежащее в шаре $|x| < B$, $B > x_0$. Проведем в $|x| < B$ ε-решетку, т. е. разбиение этого шара плоскостями параллельными координатным, расположенных на расстоянии ε. Теперь, начиная от места вхождения шпиля $f_1(S)$ в шар $|x| < x_0$, используя возможность изгибать с малыми характеристиками и достаточную протяженность изогнутого до инверсии шпиля, достаточно провести вторично изгибаемый шпиль в кольце $x_0 < |x| < B$ так, чтобы он имел непустое пересечение с каждым кубом решетки, не пересекающимся с $f_1(S)$; число последних конечно. Теорема доказана.

Институт математики
Сибирского отделения Академии наук СССР
Новосибирск

Поступило
17 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. А. Лаврентьев, П. П. Белинский*, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 128, ч. II, 35 (1972). [2] *F. W. Gehung, J. Väisälä*, Acta Math., v. 114, 1 (1965). [3] *Väisälä*, Lectures on n-dimensional Quasiconformal Mappings, Lecture Notes in Mathematics, 1971, p. 229.