Доклады Академии наук СССР
1974. Том 219, № 6

УДК 512.4+513.813+517.944+519.45+519.46 *МАТЕМАТИКА*

М. А. СЕМЕНОВ-ТЯН-ШАНСКИЙ

ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ НА РИМАНОВЫХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ ОТРИЦАТЕЛЬНОЙ КРИВИЗНЫ И ТЕОРИЯ РАССЕЯНИЯ

(Представлено академиком В. С. Владимировым 10 VI 1974)

Гармонический анализ на римановых симметрических пространствах отрицательной кривизны построен более 10 лет назад в работах ([1], [2]). В настоящей работе предложен новый подход к этим вопросам, основанный на обобщении теории Лакса — Филлипса ([3]). Эта теория была впервые применена к задачам гармонического анализа в работе ([4]), где рассмотрены группы расщепимого ранга 1. В случае произвольного ранга нетривиален вопрос о правильном выборе уравнений, для которых имела бы смысл задача рассеяния. Такой выбор описан ниже; при этом основную роль играют алгебраические результаты работ ([5], [1]). Свойства полученной системы уравнений (с многомерным временем) непосредственно обобщают свойства обычного волнового уравнения.

1. Пусть G — вещественная полупростая группа Ли с конечным центром, $G=KAN$ — ее разложение Ивасава, $X=G/K$; $\mathfrak{A}$ — алгебра Ли группы A, $\mathfrak{A}^*$ — двойственное пространство, M — централизатор $\mathfrak{A}$ в K, W — группа Вейля. Порядок в системе корней $\Sigma\subset\mathfrak{A}^*$ согласуем с выбранным разложением Ивасава. Обозначим I кольцо полиномов на $\mathfrak{A}^*$ с вещественными коэффициентами, $I^W\subset I$ — подкольцо инвариантов группы Вейля. Пусть $D(X)$ — кольцо операторов Лапласа на X. Как показал Хариш-Чандра ([1]), существует канонический изоморфизм Δ: $I^W\to D(X)$. Обозначим C_0^∞ пространство комплексных гладких финитных функций на X. Операторы Лапласа симметричны на $C_0^\infty\subset L_2(X)$. Ограничивая поле скаляров, мы будем часто рассматривать C_0^∞ как $\mathbf{R}$-модуль. Спаривание Δ: $I^W\times C_0^\infty\to\to C_0^\infty$: $(\sigma, \varphi)\mapsto\Delta_\sigma\varphi$. $\mathbf{R}$-линейно и превращает C_0^∞ в I^W-модуль. Полиному $\chi\in I$ сопоставим дифференциальный оператор на $\mathfrak{A}$ с постоянными коэффициентами; обозначим его $\chi(\partial/\partial t)$.

Рассмотрим теперь систему уравнений для функций на $\mathfrak{A}\times X$

$$\sigma(\partial/\partial t)u(t, x)=\Delta_\sigma u(t, x)\qquad\forall\sigma\in I^W. \tag{1}$$

Изучение системы (1) и построение для нее теории рассеяния составляет основное содержание этой работы.

2. Пусть $\tilde{\mathscr{L}}$ — пространство гладких решений системы (1), финитных при $\forall t\in\mathfrak{A}$. Спаривание $I\times\tilde{\mathscr{L}}\to\tilde{\mathscr{L}}$: $(p, u)\mapsto p(\partial/\partial t)$ и наделяет $\tilde{\mathscr{L}}$ структурой I-модуля. Фиксируем $t\in\mathfrak{A}$ и зададим отображение i_t: $\tilde{\mathscr{L}}\to C_0^\infty\otimes\otimes_{I^W}\mathrm{Hom}_{I^W}(I, I^W)=\tilde{\mathscr{H}}$ формулой

$$\langle i_t(u), p\rangle=(p(\partial/\partial t)u)(t, \cdot)\qquad\forall p\in I.$$

В пространстве $\tilde{\mathscr{H}}$ существует естественная структура I-модуля, согласованная со структурой I^W-модуля в C_0^∞. Для $\chi\in I$ определим оператор L_χ: $\mathscr{H}\to\tilde{\mathscr{H}}$ формулой

$$\langle L_\chi f, p\rangle=\langle f, \chi\cdot p\rangle\qquad\forall p\in I.$$

Предложение 1. *Система* (1) *с начальным условием* $i_0(u)=f_0$ *эквивалентна задаче Коши для функции* $f\colon t\mapsto i_t(u)$:

$$\chi\Big(\frac{\partial}{\partial t}\Big) f(t,x)=L_\chi f(t,x)\quad \forall\chi\in I;\quad f|_{t=0}=f_0. \tag{2}$$

Мы видим, что задача (2) тесно связана с изучением расширения колец $I^W\subset I$. Переход к алгебраическому расширению кольца операторов Лапласа полезен во многих вопросах теории представлений (ср. ([6])). Связь этого расширения с задачей Коши является, по-видимому, новой. Напомню его свойства (см. ([7])).

Предложение 2. I^W — *свободная алгебра полиномов*, I — *свободный* I^W-*модуль. Существует такое подпространство* $U\subset I$, *устойчивое относительно* W, *что* $I\simeq U\otimes_{\mathbf{R}} I^W$. *Пусть* Q — *поле отношений* I, *тогда* Q^W — *поле отношений* I^W, $Q^W\subset Q$ — *расширение Галуа с группой Галуа* W.

Спаривание $Q\times Q\to Q^W$: $(x,y)\mapsto \mathrm{tr}_{Q/Q^W}(xy)$ позволяет отождествить Q с двойственным пространством. Пусть $D=\{x\in Q;\ \mathrm{tr}\, xy\in I^W\ \ \forall y\in I\}$. Очевидно, $\tilde{\mathscr{H}}\simeq C_0^\infty\otimes_{I^W} D$. Определим $\pi\in I$ формулой $\pi(\lambda)=\prod\limits_{\alpha\in\Sigma_+^0}(\lambda,\alpha)$; здесь Σ_+^0 — множество положительных неделимых корней. Как доказано в ([1]), $D=\pi^{-1}\cdot I$. Следовательно, форма $(x,y)\mapsto\pi^2\,\mathrm{tr}(xy)$ принимает на $D\times D$ значения в I^W. Зададим спаривание e: $\tilde{\mathscr{H}}\otimes\tilde{\mathscr{H}}\to C_0^\infty\otimes_{I^W} C_0^\infty$ формулой

$$e(\varphi\otimes x,\psi\otimes y)=\pi^2\,\mathrm{tr}\, xy\cdot(\varphi\otimes\psi)\qquad \forall\varphi,\psi\in C_0^\infty,\ \forall x,y\in D.$$

Пусть $\mathscr{N}\subset C_0^\infty\otimes_{\mathbf{R}} C_0^\infty$ — подмодуль, порожденный элементами вида $\Delta_\sigma\varphi\otimes\psi-\varphi\otimes\Delta_\sigma\psi$; $\varphi,\psi\in C_0^\infty$, $\sigma\in I^W$. Выберем любое расщепление s точной последовательности $\mathbf{R}$-модулей:

$$0\to\mathscr{N}\to C_0^\infty\otimes_{\mathbf{R}} C_0^\infty\to C_0^\infty\otimes_{I^W} C_0^\infty\to 0.$$

Пусть δ^*: $C_0^\infty\otimes_{\mathbf{R}} C_0^\infty\to C_0^\infty$ — гомоморфизм, индуцированный диагональным отображением δ: $X\to X\otimes X$. Энергетической формой назовем форму на $\tilde{\mathscr{H}}$

$$(f,g)_E=\int\limits_X d\mu(x)\,\delta^*\circ s\circ e(f,\bar g) \tag{3}$$

(сопряжение $g\mapsto g$ имеет очевидный смысл). Корректность этого определения, т. е. независимость энергии от выбора s, вытекает из симметричности операторов Лапласа.

Фиксируем $U\subset I$, как в предложении 2, и пусть U^* — двойственное над $\mathbf{R}$ пространство. Тогда $\tilde{\mathscr{H}}\simeq C_0^\infty\otimes_{\mathbf{R}} U^*$, как векторное пространство над $\mathbf{C}$. Выбрав базис в U, можно реализовать операторы L_χ и энергетическую форму в виде матриц, элементы которых — операторы Лапласа. В частности, если $\mathrm{rank}\, X=1$, система (1) сводится к уравнению $u_{tt}=(\Delta+(\rho,\rho))u$ (Δ — оператор Лапласа — Бельтрами, ρ — полусумма положительных корней); задача (2) и форма (3) совпадают с классическими.

Теорема 1. (I) *Энергетическая форма положительна на* $\tilde{\mathscr{H}}$. *Таким образом,* $\tilde{\mathscr{H}}$ *предгильбертово. Пусть* $\mathscr{H}$ — *его пополнение.*

(II) *Операторы* L_χ *в существенном самосопряжении на* $\tilde{\mathscr{H}}\subset\mathscr{H}$ *при* $\forall\chi\in I$.

Из теоремы 1 вытекает разрешимость задачи (2) и независимость энергии от времени. Обозначим $\mathscr{L}$ пространство решений системы (1) с конечной энергией.

Пусть $\mathfrak{A}_+\subset\mathfrak{A}$ — камера Вейля. Для $x\in X$ будем писать $t=t(x)$, если $x=ke^t\cdot x_0$, $k\in K$, $t\in\mathfrak{A}_+$. Пусть $B_R=\{x\in X;\ |t(x)|<R\}$.

Теорема 2. *Пусть* $u\in\mathscr{L}$, $\mathrm{supp}\, i_0(u)\subset B_R$. *Тогда при* $\forall t\in\mathfrak{A}$

$$\mathrm{supp}\, i_t(u)\subset B_{R+|t|}.$$

Теорема 3. (I) *Фиксируем* $t\in\mathfrak{A}_+$, $\tau\in\mathfrak{A}$, $k\in K$, $s\in W$. *Тогда для* $\forall u\in\tilde{\mathscr{L}}$ *существует поточечный предел, не зависящий от* t:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} e^{\alpha(\rho,t)}\pi\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u(\alpha\cdot s^{-1}t+\tau, ke^{\alpha t}x_0)\equiv \mathbf{W}_s u(\tau,k).$$

(II) *Справедливо равенство Планшереля*

$$|u|_E^2=\int\limits_{\mathfrak{A}\times K/M} d\tau\, dk|\mathbf{W}_s u(\tau,k)|^2.$$

Оператор $\mathbf{W}_s$ *продолжается до изометрии пространства* $\mathscr{L}$ *на* $L_2(\mathfrak{A}\times K/M)$.

Аналогичную теорему для волнового уравнения см. в ([3]), стр. 110.

Обозначим $A(x, k)$ сложное расстояние от точки x_0 до орисферы с нормалью kM, проходящей через $x\in X$ (см. ([8])). Назовем w-расходящейся плоской волной функцию $\Phi_w(\cdot;\ \lambda,\ k)$, зависящую от параметров $\lambda\in\mathfrak{A}_C^*=\mathfrak{A}^*\otimes_R C$, $k\in K$:

$$\Phi_w(t,\ x;\ \lambda,\ k)=\exp\{-i(\lambda,\ t)+(iw\cdot\lambda+\rho)A(x,\ k)\}.$$

Предложение 3. *При* $\forall\lambda\in\mathfrak{A}_C^*$, $\forall k\in K$, $\forall w\in W$ Φ_w — *решение системы* (1).

Это предложение тесно связано с конструкцией изоморфизма Δ, см. ([1]).

Определим преобразование Фурье (первоначально на $\ddot{\mathscr{H}}$) формулой

$$(F_w f)(\lambda,\ k)=(f,\ i_0\Phi_w(\cdot;\ \lambda,\ k))_E.$$

Теорема 4. (I) *При* $\forall w\in W$ F_w *продолжается до изометрического отображения* $\mathscr{H}$ *на* $L_2(\mathfrak{A}^*\times K/M;\ \mu)$ *с мерой* $\mu(d\lambda\, dk)=|b(\lambda)|^{-2}d\lambda\, dk$. *Здесь* $b(\lambda)=\pi(\lambda)c(\lambda)$ — *функция Хариш-Чандры* (см. ([1], [2])).

(II) *Пусть* Φ: $L_2(\mathfrak{A})\to L_2(\mathfrak{A}^*)$ — *преобразование Фурье; тогда* $\mathbf{W}_s=\Phi^*\circ[b(-s\cdot\lambda)^{-1}]\circ F_s\circ i_0$.

Для $\lambda\in\mathfrak{A}_C^*$ обозначим T_λ представление основной серии G; пространство представления $\mathfrak{H}$ отождествим с $L_2(K/M)$. Пусть S_λ^w — сплетающий оператор для представлений T_λ, $T_{w\cdot\lambda}$: $T_\lambda(g)S_\lambda^w=S_\lambda^w T_{w\cdot\lambda}(g)$. Мы нормируем его условием $S_\lambda^w\cdot 1=1$. Как известно, функция $\lambda\mapsto S_\lambda^w$ — мероморфная операторнозначная функция на $\mathfrak{A}_C^*$. Можно показать, что S_λ^w — унитарный оператор в $\mathfrak{H}$ при $\forall\lambda\in\mathfrak{A}^*$. Пусть T^w — представление G в $L_2(\mathfrak{A}^*;\ \mathfrak{H})$, действующее по формуле $(T^w(g)a)_\lambda=T_{w\cdot\lambda}(g)a_\lambda$, T — естественное представление G в $\mathscr{H}$.

Предложение 4. *Справедливы следующие соотношения*:

(I) $F_w\circ L_\chi=[\chi]\circ F_w$ $\forall w\in W$, $\forall\chi\in I$.

(II) $F_w=(S^w)^*F_e$; $F_w\circ T(g)=T^w(g)\circ F_w$ $\forall w\in W$, $\forall g\in G$.

Пусть $C_+=\{(t,\ x)\in\mathfrak{A}_+\times X;\ |t(x)|<|t|\}$, $\mathbf{D}_+=\{i_0(u);\ u\in\mathscr{L}\ \&\ u|_{C_+}=0\}$. $\mathbf{D}_+$ будем называть уходящим подпространством (ср. ([3])). Аналогично можно определить w-уходящие подпространства для $\forall w\in W$. Обозначим H_2^- пространство функций со значениями в $\mathfrak{H}$, регулярных в $\mathfrak{A}^*-i\mathfrak{A}_+^*\subset\mathfrak{A}_C^*$ и таких, что

$$\sup_{\varepsilon\in\mathfrak{A}_+^*}\int\limits_{\mathfrak{A}^*} d\lambda\,|f(\lambda-i\varepsilon)|_{\mathfrak{H}}^2<\infty.$$

Если $\{\omega_1,\ldots,\omega_l\}$ — базис в $\mathfrak{A}$, то для $t=\sum\limits_k t_k\omega_k$ положим $\mathbf{U}_t=\exp i\sum t_k L_{\omega_k}$.

Операторы $\mathbf{U}_t$ образуют унитарное представление аддитивной группы $\mathfrak{A}$ в $\mathscr{H}$.

Теорема 5. (I) $\bigcap\limits_{t\in\mathfrak{A}_+}\mathbf{U}_t\mathbf{D}_+=\{0\}$; $\bigcup\limits_{t\in\mathfrak{A}}\mathbf{U}_t\cdot\mathbf{D}_+=\mathscr{H}$.

(II) $\Phi\circ\mathbf{W}_e$ *отображает* $\mathbf{D}_+$ *на* H_2^-.

Будем называть $\mathbf{S}^w=\Phi\mathbf{W}_e\mathbf{W}_w^*\Phi^*$ операторами рассеяния. Нетрудно проверить, что

$$\mathbf{S}_\lambda^w=\frac{b(-w\cdot\lambda)}{b(-\lambda)}S_\lambda^w\quad \forall w\in W,\ \forall\lambda\in\mathfrak{A}^*.$$

Таким образом, операторы рассеяния — мероморфные функции на $\mathfrak{A}_C^*$, унитарные при $\forall\lambda\in\mathfrak{A}^*$.

Теорема 6. *При* $\forall w\in W$ $S^wH_2^-\subset H_2^-$ *замкнуто. Если* $w\geqslant v$, *то* $S^wH_2^-\subset S^vH_2^-$.

(Частичная упорядоченность в W определена, например, в [9].)

Это свойство операторов S^w естественно назвать принципом причинности. Операторы $\mathbf{S}^w$, вообще говоря, принципу причинности не удовлетворяют. Будем говорить, что для системы (1) выполнен принцип Гюйгенса, если каждое решение с компактным носителем — эвентуально уходящее.

Предложение 5. *Система* (1) *тогда и только тогда удовлетворяет принципу Гюйгенса* (*принципу причинности*), *когда все корни* (G, K) *имеют четную кратность* (*соответственно кратность* 2).

Обобщим теперь теорему 3, что позволит нам интерпретировать результаты работы [10] с точки зрения теории рассеяния. Пусть $\theta\subset\Sigma_+$ — любое множество из простых корней. $\langle\theta\rangle$ — его линейная оболочка в Σ. Положим $\mathfrak{A}_\theta=\{t\in\mathfrak{A};\ t\perp\theta\}$, $\mathfrak{A}_\theta^+=\{t\in\mathfrak{A}_\theta;\ (t,\alpha)>0\quad \forall\alpha\in\Sigma_+\setminus\langle\theta\rangle_+\}$. Пусть $G(\theta)\subset G$ — максимальная связная полупростая подгруппа, централизующая $\mathfrak{A}_\theta$, $G(\theta)=$ $=K(\theta)A(\theta)N(\theta)$ — ее разложение Ивасава, совместное с разложением $G=$ $=KAN$, $X(\theta)=G(\theta)/K(\theta)$. Группа Вейля W_θ пары $(G(\theta), K(\theta))$ совпадает со стабилизатором $\mathfrak{A}_\theta$ в W. Пусть $\pi_\theta(\lambda)=\prod\limits_{\alpha\in\langle\theta\rangle_+}(\lambda,\alpha)$, $d_\theta=\pi\cdot\pi_\theta^{-1}\in I$.

Теорема 7. (I) *Фиксируем* $t\in\mathfrak{A}_\theta^+$, $\tau\in\mathfrak{A}_\theta$, $t_\theta\in\mathfrak{A}(\theta)$, $g_\theta\in G(\theta)$, $k\in K$, $w\in W$. *Для* $\forall u\in\mathscr{D}$ *существует поточечный предел*

$$\lim_{\beta\to+\infty} e^{\beta\rho(t)}\left(d_\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)u\right)(w^{-1}\cdot(\beta t+\tau+t_\theta),\ kg_\theta e^{\beta t}\cdot x_0)\equiv\mathbf{W}_w{}^\theta u(t_\theta, g_\theta)\tau, k),$$

не зависящий от t.

(II) *При фиксированных* τ, k *функция* $(t_\theta, g_\theta)\mapsto\mathbf{W}_w{}^\theta u(t_\theta, g_\theta|\tau, k)$ *постоянна на правых смежных классах по* $K(\theta)$ *и является решением системы* (1) *в пространстве* $\mathfrak{A}(\theta)\times X(\theta)$.

(III) *Если* $t_\theta\in\mathfrak{A}(\theta)_+$, $\tau_\theta\in\mathfrak{A}(\theta)$, $s\in W_\theta$, $w\in W$, *то*:

$$\lim_{\alpha\to+\infty} e^{\alpha\rho_\theta(t_\theta)}\pi_\theta\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\mathbf{W}_w{}^\theta u(\alpha\cdot s^{-1}t_\theta+\tau_\theta, e^{\alpha t_\theta}(\tau, k)=\mathbf{W}_{sw}u(w^{-1}(\tau+\tau_\theta), k).$$

(IV) *Пусть* $s\in W_\theta$. *Оператор* $\mathbf{S}^s$ *канонически отождествляется с* $\mathbf{S}_\theta{}^s$ — *оператором рассеяния для системы* (1) *в пространстве* $\mathfrak{A}(\theta)\times X(\theta)$. *Для любого* $w\in W$ *справедливо равенство*: $\mathbf{S}_\lambda{}^{sw}=\mathbf{S}_\lambda{}^w\circ(\mathbf{S}_\theta{}^s)_{w\lambda}$ (*по этому поводу см. также* [11])).

(V) *Пусть* $\mathscr{H}_\theta$ — *энергетическое пространство на* $X(\theta)$. *Имеют место равенства Планшереля*

$$|u|_E^2=\int\limits_{\mathfrak{A}_\theta\times K} d\tau\, dk|\mathbf{W}_w{}^\theta u(\cdot|\tau, k)|^2{}_{\mathscr{H}_\theta}$$

Автор глубоко благодарен Л. Д. Фаддееву и Б. С. Павлову за внимание к работе и многочисленные обсуждения.

Ленинградское отделение
Математического института им. В. А. Стеклова
Академии наук СССР

Поступило
31 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Harish-Chandra*, Am. J. Math., v. 80, 241, 553 (1958). [2] *С. Г. Гиндикин, Ф. И. Карпелевич*, ДАН, т. 145, 252 (1962). [3] *П. Лакс, Р. Филлипс*, Теория рассеяния, М., 1971. [4] *Б. С. Павлов, Л. Д. Фаддеев*, Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 27, 161 (1972). [5] *C. Chevalley*, Am. J. Math., v. 77, 778 (1955). [6] *И. М. Гельфанд, А. А. Кириллов*, Функц. анализ и прилож., т. 3, 1 (1968). [7] *Н. Бурбаки*, Группы и алгебры Ли, М., 1972. [8] *S. Helgason*, Adv. Math., v. 5, 1 (1970). [9] *И. Н. Бернштейн и др.*, УМН, т. 28, № 3, 3 (1973). [10] *G. Schiffmann*, Bull. Math. Soc. France, v. 99, 3 (1971). [11] *Ф. И. Карпелевич*, Тр. Московск. матем. общ., т. 14, 48 (1965).