

УДК 548.0:534.133

КРИСТАЛЛОГРАФИЯ

Г. Г. ЧЕРНЫХ, М. Е. БОГУШ, А. П. ФЕДОРКОВ

**СПЕКТРАЛЬНЫЕ И ТЕМПЕРАТУРНО-ЧАСТОТНЫЕ
ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЬЕЗОЭЛЕМЕНТОВ
X-СРЕЗА КВАРЦА**

(Представлено академиком Н. В. Беловым 21 V 1974)

Колебания тонких прямоугольных пластин в произвольной декартовой системе координат, показанной на рис. 1, совершающих движение в плоскости $X'OZ'$, описываются известными уравнениями движения ⁽¹⁾

$$\begin{aligned} \rho\omega^2 u + \frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial T_5}{\partial z} &= 0, \\ \rho\omega^2 w + \frac{\partial T_5}{\partial x} + \frac{\partial T_3}{\partial z} &= 0 \end{aligned} \quad (1)$$

и граничными условиями

$$\begin{aligned} T_1 = T_5 = 0 \quad \text{при} \quad x = \mp l, \\ T_3 = T_5 = 0 \quad \text{при} \quad z = \mp b, \end{aligned} \quad (2)$$

где u, w — компоненты вектора смещения в направлении осей X' и Z' , T_i — компоненты матрицы напряжений, ω — круговая частота, ρ — плотность материала, x, z — текущие координаты, l, b — половины длины и ширины пьезоэлемента соответственно.

Компоненты T_i матрицы напряжений связаны с компонентами S_j матрицы деформаций соотношениями

$$\begin{aligned} T_1 &= c_{11}S_1 + c_{13}S_3 + c_{15}S_5, \\ T_3 &= c_{13}S_1 + c_{33}S_3 + c_{35}S_5, \\ T_5 &= c_{15}S_1 + c_{35}S_3 + c_{55}S_5, \end{aligned} \quad (3)$$

где c_{ij} — плоские упругие модули материала ⁽⁴⁾.

Компоненты S_i матрицы деформаций связаны с компонентами вектора смещения соотношениями

$$S_1 = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad S_3 = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad S_5 = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4)$$

Решение граничной задачи (1), (2) не может быть выражено конечным числом элементарных функций, поэтому заменим двумерную задачу (1), (2) системой приближенных одномерных уравнений, как это делается в работе ⁽³⁾. Полученная система может быть решена аналитически. Разлагая смещения u и w в ряды по полиномам Лежандра $P_n(\eta)$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\eta) u^{(n)}, \quad w = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(\eta) w^{(n)}, \quad (5)$$

где $u^{(n)}$ и $w^{(n)}$ являются функциями только x , а $\eta = z/b$, и полагая

$$u^{(n)} = 0 \quad \text{для} \quad n > 3, \quad w^{(n)} = 0 \quad \text{для} \quad n > 2, \quad (6)$$

после соответствующих преобразований ⁽³⁾ получим искомые одномерные уравнения движения

$$\begin{aligned}
 & c_{11} \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2} + \rho \omega^2 u^{(0)} + \frac{c_{13} k_3}{b} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} + c_{15} k_5 \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{c_{15} k_5}{b} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = 0, \\
 & - \frac{3c_{13} k_3}{b} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \gamma_{55} k_{51}^2 \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} + \left(\rho \omega^2 - \frac{3k_3^2 c_{33}}{b^2} \right) w^{(1)} - \frac{3c_{35} k_3 k_5}{b} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} + \\
 & \quad + \gamma_{15} k_{51} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{3c_{35} k_3 k_5}{b^2} u^{(1)} + \frac{3\gamma_{55} k_{51}^2}{b} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = 0, \\
 & c_{15} k_5 \frac{\partial^2 u^{(0)}}{\partial x^2} + \frac{c_{25} k_3 k_5}{b} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} + c_{55} k_5^2 \frac{\partial^2 w^{(0)}}{\partial x^2} + \rho \omega^2 u_3^{(0)} + \frac{c_{55} k_5^2}{b} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} = 0, \\
 & - \frac{3c_{15} k_5}{b} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \gamma_{15} k_{51} \frac{\partial^2 w^{(1)}}{\partial x^2} - \frac{3c_{35} k_3 k_5}{b^2} w^{(1)} - \frac{3c_{55} k_5^2}{b} \frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} + \\
 & \quad + \gamma_{11} \frac{\partial^2 u^{(1)}}{\partial x^2} + \left(\rho \omega^2 - \frac{3c_{55} k_5^2}{b^2} \right) u^{(1)} + \frac{3\gamma_{15} k_{51}}{b} \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = 0, \\
 & - \frac{5\gamma_{55} k_{51}^2}{b} \frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} - \frac{5\gamma_{15} k_{51}}{b} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \bar{\gamma}_{11} \frac{\partial^2 u^{(2)}}{\partial x^2} + \left(\rho \omega^2 - \frac{15\gamma_{55} k_{51}^2}{b^2} \right) u^{(2)} = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

и граничные условия: при $x = \pm l$

$$\begin{aligned}
 & c_{11} \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{c_{13} k_3}{b} w^{(1)} + c_{15} k_5 \left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} + \frac{u^{(1)}}{b} \right) = 0, \\
 & c_{15} k_5 \frac{\partial u^{(0)}}{\partial x} + \frac{c_{35} k_3 k_5}{b} w^{(1)} + c_{55} k_5^2 \left(\frac{\partial w^{(0)}}{\partial x} + \frac{u^{(1)}}{b} \right) = 0, \\
 & \gamma_{11} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \gamma_{15} k_{51} \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} + \frac{3}{b} u^{(2)} \right) = 0, \\
 & \gamma_{15} k_{51} \frac{\partial u^{(1)}}{\partial x} + \gamma_{55} k_{51}^2 \left(\frac{\partial w^{(1)}}{\partial x} + \frac{3}{b} u^{(2)} \right) = 0, \\
 & \frac{\partial u^{(2)}}{\partial x} = 0,
 \end{aligned} \tag{8}$$

где

$$\gamma_{11} = c_{11} - c_{13}^2 / c_{33}, \quad \gamma_{15} = c_{15} - c_{13} c_{35} / c_{33},$$

$$\gamma_{55} = c_{55} - c_{35}^2 / c_{33}, \quad \bar{\gamma}_{11} = 1 / s_{11}^E,$$

s_{11}^E — упругая податливость, k_3, k_5, k_{51} — корректирующие множители,

$$k_3^2 = \frac{\pi^2}{12} \alpha_{55}, \quad k_5^2 = \frac{\pi^2}{12}, \quad k_{51}^2 = \frac{\pi^2}{15 \alpha_{55} a}, \quad \alpha_{ij} = c_{ij} / c_{33},$$

$$a = \{ 1 + \alpha_{55} + [(1 - \alpha_{55})^2 + 4 \alpha_{35}^2]^{1/2} \} / 2 (\alpha_{55} - \alpha_{35}^2).$$

Если пьезоэлемент покрыт электродом, то постоянные $c_{11}, c_{13}, \rho, c_{33}, \gamma_{55}$ в уравнениях (7) заменяются на

$$c_{11} \rightarrow c_{11} + \frac{E}{1 - \sigma^2} \beta, \quad c_{13} \rightarrow c_{13} + \frac{E \sigma}{1 - \sigma^2} \beta,$$

$$c_{33} \rightarrow c_{33} + \frac{E}{1 - \sigma^2} \beta, \quad \gamma_{55} \rightarrow \gamma_{55} + \frac{E}{2(1 + \sigma)} \beta, \quad \rho \rightarrow \rho + \rho' \beta,$$

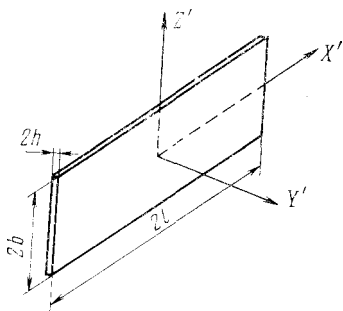


Рис. 1. Ориентация пьезоэлемента

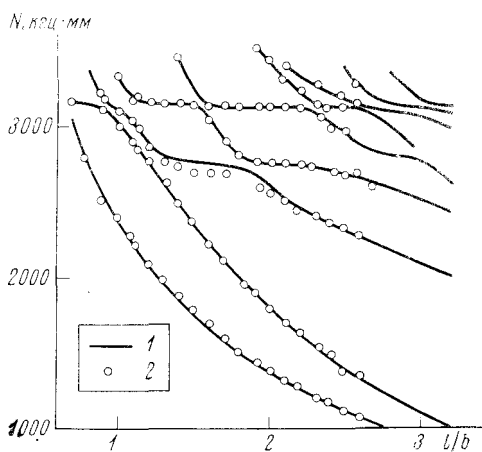


Рис. 2. Спектральные кривые $xy_5/1^\circ$ среза кварца: 1 — расчет, 2 — эксперимент

где β — отношение суммарной толщины электродов к толщине кварцевой пластинки, E — модуль Юнга материала электрода, σ — коэффициент Пуассона материала электрода, ρ' — плотность материала электрода.

Система дифференциальных уравнений (7) описывает низкочастотные связанные колебания пьезоэлемента в плоскости длина — ширина пяти основных типов: продольные по длине ($u^{(0)}$), антисимметричный сдвиг по ширине ($u^{(1)}$), симметричный сдвиг по ширине ($u^{(2)}$), изгиб ($w^{(0)}$) и продольные по ширине ($w^{(1)}$).

Граничная задача (7), (8) была решена на ЭВМ БЭСМ-4. Результаты расчета представлены сложными кривыми на рис. 2. По оси ординат отложены значения частотного коэффициента $N=2bf$ (f — частота), рассчитанного на единицу ширины пьезоэлемента, по оси абсцисс — значения отношения длины пьезоэлемента к его ширине L/b . На том же рис. 2 точками для сравнения приведены экспериментальные данные. Исходные значения физических постоянных кварца, использованных в расчете, были взяты из работы (1).

Температурно-частотные характеристики (т.ч.х.) рассчитывались по формуле (5)

$$(f-f_0)/f_0 = \left(\frac{\gamma_i b^0}{\gamma_i^0 b} \sqrt{\frac{c_{33} \rho^0}{c_{33}^0 \rho}} - 1 \right) 10^6,$$

где γ_i — собственное значение граничной задачи (7) — (8) при текущей температуре θ . Индекс 0 обозначает, что величина взята при фиксированной температуре $\theta=25^\circ\text{C}$.

На рис. 3 приведены рассчитанные т.ч.х. пьезоэлемента среза $xy_5/5^\circ$ с длиной 50 мм, шириной 7 мм и толщиной 0,8 мм, главные грани которого полностью покрыты никелевыми электродами толщиной 0,4 мкм. Кривые 1 и 2 рассчитаны без учета электродов с исходными данными, взятыми соответственно из работ (1) и (2). Кривая 3 была рассчитана с учетом конечной толщины электродов и их физических свойств, причем исходные

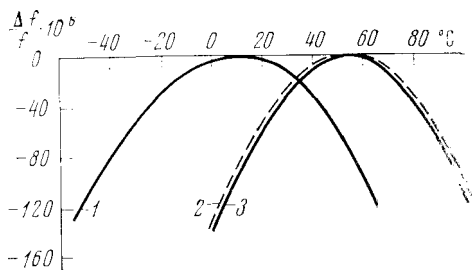


Рис. 3. Т.ч.х. пьезоэлемента $xy_5/5^\circ$ среза кварца, совершающего продольные колебания: 1 — без учета электродов по Бехману, 2 — без учета электродов по Зеленке, 3 — с учетом электродов по Бехману

данные для физических свойств кварца были взяты из работы (1). Поскольку температурные коэффициенты модулей упругости никеля неизвестны, они были получены численным путем из совмещения рассчитанной т.ч.х. с кривой 2, подтвержденной экспериментально (2). Расчет показал, что основное влияние на т.ч.х. оказывают температурные свойства упругих модулей электродов, а не их инерционных членов.

Поступило
18 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

¹ R. Bechmann, A. D. Ballato, T. J. Lukaszek, Proc. IRE, v. 50, 1812 (1952). ² J. Zelenka, P. C. Y. Lee, IEEE Trans. Son. and Ultrason., v. SU-18, № 2, 79 (1971). ³ R. D. Mindlin, M. A. Medick, J. Appl. Phys., v. 26, № 4, 561 (1959). ⁴ Г. Г. Черных, Ю. М. Друккер, Электронная техника, сер. 10, Радиокомпоненты, 1973, в. 1, сер. 35. ⁵ Г. Г. Черных, М. И. Ярославский, В. Б. Грузиненко, Кристаллография, т. 19, № 4 (1974).