

УДК 517.2

МАТЕМАТИКА

О. А. ОЛЕЙНИК, Е. В. РАДКЕВИЧ

**О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОБЩИХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ СИСТЕМ  
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННЫХ  
ОБЛАСТЯХ**

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 26 VII 1974)

В настоящей работе на основе одной теоремы об аналитичности по пространственным переменным решений некоторого класса параболических систем получены теоремы о поведении решений общих параболических систем в неограниченных областях, аналогичные классическим теоремам Лиувилля и Фрагмена — Линделефа для гармонических функций. Одна из теорем такого типа для систем параболических по И. Г. Петровскому <sup>(1)</sup>, была приведена нами в заметке <sup>(2)</sup>. В частности, в настоящей работе получены теоремы единственности решений общих краевых задач без начальных условий, рассмотренных впервые для уравнения теплопроводности с условиями Дирихле в работе <sup>(3)</sup>. Теоремы типа Лиувилля и Фрагмена — Линделефа для общих эллиптических систем доказаны нами в работе <sup>(4)</sup>.

1. Пусть  $\omega$  — область в  $R_{x,t}^{n+1} = (x_1, \dots, x_n, t) = (x, t)$ ,  $\partial\omega$  — граница  $\omega$ ,  $\gamma$  — открытое множество на  $\partial\omega$ , которое нигде не касается плоскостей  $t = \text{const}$ . В частности,  $\gamma$  может либо быть пустым множеством, либо совпадать с  $\partial\omega$ . Пусть  $\Omega = \omega \times \{|x_0| \leq a\}$ ,  $a = \text{const} \geq 2$  и в  $\Omega \subset R_{x_0,x,t}^{n+2}$  задана система дифференциальных уравнений вида

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\alpha_0 + |\alpha| + 2b \leq s_j + t_j} a_{ij}^{\alpha_0 \alpha \beta} (x, t) D_{x_0}^{\alpha_0} D_x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} v_j = 0, \quad l=1, \dots, N, \quad (1)$$

где  $D_{x_j} = -i \partial / \partial x_j$ ,  $j=0, 1, \dots, n$ ;  $D_x^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \dots D_{x_n}^{\alpha_n}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ ,  $b$  — положительное целое число.

Будем предполагать, что в  $\Omega$  система (1) равномерно параболическа с постоянной параболичности  $\lambda$  (см. <sup>(5, 6)</sup>). Совокупность целых чисел  $s_1, \dots, s_N, t_1, \dots, t_N$  такова, что  $\sum_{j=1}^N (s_j + t_j) = 2m$ ,  $s_j \leq 0, t_j \geq 0, j=1, \dots, N$ . Пусть на множестве  $\Gamma = \gamma \times \{|x_0| < a\}$  границы области  $\Omega$  заданы граничные условия

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\alpha_0 + |\alpha| + 2b \leq l_{hj}} b_{hj}^{\alpha_0 \alpha \beta} (x, t) D_{x_0}^{\alpha_0} D_x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} v_j = 0, \quad h=1, \dots, m. \quad (2)$$

Пусть  $l_h = \max_j (l_{hj} - t_j)$ ,  $h=1, \dots, m$  и  $l_0 = \max(0, l_1, \dots, l_m)$ . Система (1) и граничные условия (2) будут в дальнейшем играть вспомогательную роль. Введем пространства  $C^{s,b}(A)$  функций с нормой

$$\|u\|_A^{s,b} = \sup_A \sum_{\alpha_0 + |\alpha| + 2b \leq s} \left| D_{x_0}^{\alpha_0} D_x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u \right|.$$

Для любого множества  $A$  и  $T \in R^1$  положим  $A^T = A \cap \{t \leq T\}$ . Пусть  $\gamma$  принадлежит классу  $C^{l_0+t'+q+1, b}$ , где  $t' = \max_j t_j$ ,  $q = \text{const} \geq 0$ . Обозначим

$S_1^{\hat{x}, \hat{t}, \rho} = \{x, t; |x_j - \hat{x}_j| < \rho, j=1, \dots, n, -\rho^{2b} < t - \hat{t} \leq 0\}$  и  $S_2^{\hat{x}, \hat{t}, \rho} = \{x, t; |x_j - \hat{x}_j| < \rho, j=1, \dots, n; -\rho < t - \hat{t} \leq 0\}$ . Предположим, что для любой точки  $(\hat{x}, \hat{t}) \in \gamma$  существует окрестность  $O_{\hat{x}, \hat{t}}$  такая, что  $O_{\hat{x}, \hat{t}}$  содержит множество  $S_1^{\hat{x}, \hat{t}, \rho}$ , причем  $O_{\hat{x}, \hat{t}} \cap \omega^t$  гомеоморфно при некотором преобразовании  $F_{\hat{x}, \hat{t}}: y = f(x, t)$ ,  $\tau = t$ , множеству  $H_{\rho}^{\hat{y}, \hat{\tau}} = \{y, \tau; |y_j - \hat{y}_j| < \rho, j=1, \dots, n-1; \rho > y_n - \hat{y}_n \geq 0, -\rho^{2b} < \tau - \hat{\tau} \leq 0\}$ , где  $\hat{y} = f(\hat{x}, \hat{t})$ ,  $\hat{\tau} = \hat{t}$ , а  $(\partial\omega)^{\hat{t}} \cap O_{\hat{x}, \hat{t}}$  гомеоморфно при этом  $H_{\rho}^{\hat{y}, \hat{\tau}} \cap \{y_n = \hat{y}_n\}$ ,  $\rho = \text{const} \leq 1$ .

Пусть преобразование  $F_{\hat{x}, \hat{t}}$  и обратное к нему  $F_{\hat{x}, \hat{t}}^{-1}$  заданы функциями, нормы которых в пространстве  $C^{l_0+t'+q+1, b}$  ограничены постоянной  $K$ , причем  $d$  и  $K$  можно выбрать не зависящими от точки  $(\hat{x}, \hat{t}) \in \gamma$ . Обозначим их  $d(\gamma)$  и  $K(\gamma)$ . Мы предполагаем, что система (1) в  $\Omega$  и граничные условия (2) на  $\Gamma$  удовлетворяют равномерно на  $\Gamma$  условию дополнителности с постоянной  $\Delta_\Gamma > 0$  (аналог условия Шапиро – Лопатинского для эллиптических систем, см. (5-8)).

Для точки  $(\hat{x}, \hat{t})$  пространства  $R_{x, t}^{n+1}$  и множества  $A \subset R_{x, t}^{n+1}$  положим  $r_j(\hat{x}, \hat{t}; A)$  равным верхней грани тех  $\rho$ , для которых  $S_j^{\hat{x}, \hat{t}, \rho} \cap A$  пусто, если  $(\hat{x}, \hat{t}) \notin \bar{A}$ , и  $r_j(\hat{x}, \hat{t}; A) = 0$ , если  $(\hat{x}, \hat{t}) \in \bar{A}$ ,  $j=1, 2$ . Для любых двух множеств  $A, B \subset R_{x, t}^{n+1}$  положим  $r_j(A, B) = \inf r_j(x, t; B)$  при  $(x, t) \in A$ . Пусть область  $\omega_1 \subset \omega$ ,  $\partial\omega_1 \cap \partial\omega \subset \gamma$ . Для любого вещественного  $T$  положим  $d_T = \min(1, r_1(\omega_1^T, \partial\omega \setminus \gamma))$ , если  $(\partial\omega)^T \neq \gamma^T$ , и  $d_T = 1$ , если  $(\partial\omega)^T = \gamma^T$ .

2. Мы будем изучать в области  $\omega \subset R_{x, t}^{n+1}$  зависящую от комплексного параметра  $\mu = \mu_1 + i\mu_2$  соответствующую системе (1) систему вида

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\alpha_0 + |\alpha| + 2b\beta \leq s_1 + t_j} a_{ij}^{\alpha_0\alpha\beta}(x, t) \mu^{\alpha_0} D_x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u_j = 0, \quad l=1, \dots, N, \quad (3)$$

с граничными условиями на  $\gamma$

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\alpha_0 + |\alpha| + 2b\beta \leq l_{hj}} b_{hj}^{\alpha_0\alpha\beta}(x, t) \mu^{\alpha_0} D_x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u_j = 0, \quad h=1, \dots, m, \quad (4)$$

соответствующими граничным условиям (2). Будем рассматривать решения и системы (3) такие, что  $u_j \in C^{l_0+t_j+q+1, b}(\omega')$ ,  $j=1, \dots, N$ , для любой конечной области  $\omega' \subset \omega$ , если  $\bar{\omega}' \subset \omega \cup \gamma$ .

Теорема 1. Пусть коэффициенты системы (3) и граничных условий (4) таковы, что

$$\|a_{ij}^{\alpha_0\alpha\beta}\|_{\omega}^{l_0-s_1+q+1, b} + \|b_{hj}^{\alpha_0\alpha\beta}\|_{\gamma}^{l_0-l_h+q+1, b} \leq M \quad (5)$$

при  $l, j=1, \dots, N, h=1, \dots, m, \alpha_0 + |\alpha| + 2b\beta \leq s_1 + t_j, |\alpha_0'| + |\alpha'| + 2b\beta' \leq l_{hj}$ , где  $M = \text{const} > 0$ .

Тогда для любого решения и системы (3) в  $\omega$  с граничными условиями (4) на  $\gamma$  справедлива оценка

$$\sup_{\omega^T} \left| D_x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u_j \right| \leq \exp\{\ln C - \delta(|\mu_1| + |\mu_2|)\} \sup_{\omega^T} |u_j|$$

при  $|\alpha| + 2b\beta \leq l_0 + t_j + q - 1, j=1, \dots, N$ , где  $\delta, C = \text{const} > 0$  и зависят лишь от  $n, N, m, b, l_0, q, \lambda, \Delta_\Gamma, M, d_T, d(\gamma), K(\gamma)$ .

Аналогичные оценки для общих эллиптических и некоторых классов других систем получены нами в (9).

Для любой точки  $(x, t) \in \omega_1$  через  $p_j(x, t)$  обозначим  $r_j(x, t; \partial\omega \setminus \gamma)$  если  $\partial\omega \setminus \gamma$  непусто,  $j=1, 2$ . Через  $\bar{t}$  обозначим верхнюю грань  $t$  таких что  $\gamma^t = (\partial\omega)^t$ .

Теорема 2. Пусть  $u$  — решение системы (3) в  $\omega$  с граничными условиями (4) на  $\gamma$  и выполнено условие (5). Пусть в  $\omega^{\bar{t}}$

$$|u(x, t)| \leq \exp\{\delta_1(|x| + |t|)\}, \quad \delta_1 = \text{const} > 0,$$

и пусть для любой точки  $(x, t) \in \omega_1$  при  $t > \bar{t}$

$$\sup_{S_{\bar{t}, t, P_2(x, t)}} |u| \leq \exp\{\delta_1' p_2(x, t)\}, \quad \delta_1' = \text{const} > 0.$$

Тогда, если  $\delta|\mu_1| > \ln C + |\mu_2| + \delta_1$ , то  $u \equiv 0$  в  $\omega^{\bar{t}}$ . Если же  $p_2(x, t) \geq 2$ ,  $\delta|\mu_1| > \ln C + |\mu_2| + \delta_1' + \delta_2$  и  $\delta_2 = \text{const} > 0$ , то в  $\omega_1$  при  $t > \bar{t}$  справедливо неравенство

$$\sum_{|\alpha|+2b\beta \leq l_0+t_j+q-1} \left| D_x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u_j(x, t) \right| \leq C_1 \exp\{-\delta_2 p_2(x, t)\},$$

где  $C_1 = \text{const} > 0$ ,  $j=1, \dots, N$ . Постоянные  $\delta$  и  $C$  зависят лишь от  $n, N, m, l_0, b, q, \lambda, \Delta_\Gamma, M, d(\gamma), K(\gamma)$ .

Как следствие теоремы 2 получаем теорему типа Лнувилля (случай  $\omega = (R_{x,t}^{n+1})^T$ ) и теорему о единственности решения краевой задачи без начальных условий (случай  $\gamma = (\partial\omega)^T$ ). Из теоремы 2 вытекает также

Теорема 3 (асимптотика решений при  $t \rightarrow +\infty$ ). Пусть область  $\omega$  совпадает с полупространством  $R_{x,t}^{n+1} \cup \{t > 0\}$  либо  $\gamma = \partial\omega \cap \{t > 0\}$ , и выполнено условие (5). Предположим, что для решений  $u$  системы (3) в  $\omega \cap \{t > 0\}$  с условиями (4) на  $\gamma$  справедлива оценка

$$|u(x, t)| \leq \exp\{\delta_1|t|\}, \quad \delta_1 = \text{const} > 0.$$

Тогда, если  $\delta|\mu_1| > \ln C + |\mu_2| + \delta_1 + \delta_2$ , то в  $\omega \cap \{t > 0\}$

$$\sum_{|\alpha|+2b\beta \leq l_0+t_j+q-1} \left| D_x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u_j(x, t) \right| \leq C_1 \exp\{-\delta_2|t|\}, \quad C_1, \delta_2 = \text{const} > 0.$$

Постоянные  $C$  и  $\delta$  зависят только от  $n, N, m, l_0, q, b, \lambda, \Delta_\Gamma, d, K, M$ .

3. Через  $(A)_\rho$  обозначим образ множества  $A \subset R_{x,t}^{n+1}$  при преобразовании  $y = \rho^{-1}x$ ,  $\tau = \rho^{-2b}t$ ,  $\rho = \text{const} > 1$ . Далее будем рассматривать функцию  $\varphi(s)$ , положительную при  $s > 0$  и такую, что для любого  $\rho > 1$  и любого  $s$  в интервале  $1/4\rho < s < 4\rho$  имеем  $h^{-1}\varphi(\rho) \leq \varphi(s) \leq h\varphi(\rho)$ , где  $h = \text{const} > 0$  и  $h$  не зависит от  $s$  и  $\rho$ . Обозначим  $v_j = \max_k (t_j - t_k)$ ,  $v_j' = \min_k (t_j - t_k)$ . Пусть

$$E(x, t) = |x| + |t|^{1/(2b)}.$$

Теорема 4. Пусть в области  $\omega$  задана система

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\alpha_0+|\alpha|+2b\beta \leq s_l+t_j} a_{ij}^{\alpha_0\alpha\beta}(x, t) D_x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u_j = 0, \quad l=1, \dots, N, \quad (6)$$

такая, что для любой точки  $(\hat{x}, \hat{t}) \in \omega$  и  $E(\hat{x}, \hat{t}) > 1$  система

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\alpha_0+|\alpha|+2b\beta \leq s_l+t_j} a_{ij}^{\alpha_0\alpha\beta}(\rho y, \rho^{2b}\tau) \rho^{s_l+t_j-\alpha_0-|\alpha|-2b\beta} \varphi^{-\alpha_0}(\rho) D_{y_0}^{\alpha_0} D_y^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} v_j = 0, \quad (7)$$

$l=1, \dots, N$ , где  $\rho = E(\hat{x}, \hat{t})$ , равномерно параболическа в области  $\Omega_\rho = (\omega \cap S_1^{\hat{x}, \hat{t}, \rho/2})_\rho \times \{|y_0| < 1\}$  пространства  $R_{y_0, y, \tau}^{n+2}$  с постоянной параболическости  $\lambda$ , не зависящей от  $(\hat{x}, \hat{t})$ . Пусть  $d((\gamma \cap S_1^{\hat{x}, \hat{t}, \rho/2})_\rho) \geq d_1 > 0$ ,  $K((\gamma \cap S_1^{\hat{x}, \hat{t}, \rho/2})_\rho) \leq K_1 < \infty$ , где  $d_1, K_1 = \text{const} > 0$  и не зависят от  $(\hat{x}, \hat{t})$ . Пусть на  $\gamma$  заданы граничные условия

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\alpha_0+|\alpha|+2b\beta \leq l_h} b_{hj}^{\alpha_0\alpha\beta}(x, t) D_x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u_j = 0, \quad h=1, \dots, m, \quad (8)$$

такие, что соответствующие им граничные условия

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\alpha_0+|\alpha|+2b\beta \leq l_{hj}} b_{hj}^{\alpha\alpha\beta} (\rho y, \rho^{2b}\tau) \rho^{l_h+t_j-\alpha_0-|\alpha|-2b\beta} \varphi^{-\alpha_0}(\rho) D_{y_0}^{\alpha_0} D_y^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} v_j = 0,$$

$h=1, \dots, m$ , на  $\Gamma_\rho = (\gamma \cap \widehat{S}_1^{\alpha, \hat{t}, \rho/2})_\rho \times \{|y_0| < 1\}$  совместно с системой (7) удовлетворяют условию дополнителности с  $\Delta_{\Gamma_\rho} \geq \Delta = \text{const} > 0$ , где  $\Delta$  не зависит от  $(\hat{x}, \hat{t})$ .

Предположим, что для любых  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$  и  $s$ ,  $|\eta| + 2bs \leq l_0 - s_j + q + 1$ ,  $q = \text{const} \geq 0$ , для коэффициентов системы (6) в  $\omega$  при  $E(x, t) > 1$  выполнено условие

$$\left| D_x^\eta \frac{\partial^s}{\partial t^s} a_{ij}^{\alpha\alpha\beta}(x, t) \right| \leq C_2 E(x, t)^\kappa \varphi^{\alpha_0}(E(x, t)),$$

где  $\kappa = -|\eta| - 2bs + \alpha_0 + |\alpha| + 2b\beta - s_i - t_j$ ,  $C_2 = \text{const} > 0$ , а на  $\gamma \cap \{E(x, t) > 1\}$  при любых  $\eta$  и  $s$  таких, что  $|\eta| + 2bs \leq l_0 - l_h + q + 1$ , для коэффициентов граничных условий (8) выполнены неравенства

$$\left| D_x^\eta \frac{\partial^s}{\partial t^s} b_{hj}^{\alpha\alpha\beta}(x, t) \right| \leq C_2 E(x, t)^\kappa \varphi^{\alpha_0}(E(x, t)),$$

$\kappa_i = -|\eta| - 2bs + \alpha_0 + |\alpha| + 2b\beta - l_h - t_j$ . Пусть  $p_0^{-1} p_1(\hat{x}, \hat{t}) \leq p_1(x, t) \leq p_0 p_1(\hat{x}, \hat{t})$  для  $(\hat{x}, \hat{t}) \in \omega$ , и любой точки  $(x, t) \in \omega$ ,  $\cap \widehat{S}_1^{\alpha, \hat{t}, \rho/2}$ , где  $p_0 = \text{const} > 0$  и не зависит от  $(\hat{x}, \hat{t})$ . Предположим, что в области  $\omega^t$

$$|u(x, t)| \leq \exp\{\delta_1 E(x, t) \varphi(E(x, t))\}, \quad \delta_1 = \text{const} > 0,$$

а при  $(x, t) \in \omega$ ,  $t > \bar{t}$

$$\sup_{\omega \cap \widehat{S}_1^{\alpha, \hat{t}, \rho/2} \cap E(x, t)} |u| \leq \exp\{\delta_1' p_1(x, t) \varphi(E(x, t))\}, \quad \delta_1' = \text{const} > 0.$$

Тогда, если  $2h\delta_1 + \delta_2 < \delta$ , то при  $|\alpha| + 2b\beta \leq l_0 + t_j + q - 1$ ,  $j=1, \dots, N$ ,  $(x, t) \in \omega$  и  $t < \bar{t}$  имеем

$$\left| D_x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u_j(x, t) \right| \leq C_2 \exp\{-\delta_2 E(x, t) \varphi(E(x, t)) + (v_j - |\alpha| - 2b\beta) \ln E(x, t)\}.$$

Если  $\delta_1' + \delta_2' < p_0^{-1} \delta$ , то при  $|\alpha| + 2b\beta \leq l_0 + t_j + q - 1$ ,  $j=1, \dots, N$ ,  $(x, t) \in \omega$ ,  $t > \bar{t}$  имеем

$$\left| D_x^\alpha \frac{\partial^\beta}{\partial t^\beta} u_j(x, t) \right| \leq C_4 \exp\{-\delta_2' p_1(x, t) \varphi(E(x, t)) - (|\alpha| + 2b\beta) \ln p_1(x, t)\} (p_1^{v_j}(x, t) + p_1^{v_j'}(x, t)).$$

Здесь  $\delta_2'$ ,  $\delta_2$ ,  $C_3$ ,  $C_4 = \text{const} > 0$ , постоянная  $\delta$  зависит только от  $n, N, m, l_0, b, q, \lambda, C_2, d_1, K_1, h$ .

Как следствие общей теоремы 4 получаем теорему типа Лиувилля (случай  $\omega = (R_{x,t}^{n+1})^T$ ) и теорему типа Фрагмена — Липшефа (случай  $\gamma = (\partial\omega)^T$ ).

Институт проблем механики  
Академии наук СССР  
Москва

Поступило  
17 VI 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> И. Г. Петровский, Бюлл. МГУ (А), т. 1, в. 7, 1 (1938). <sup>2</sup> О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, УМН, т. 27, в. 5 (173), 249 (1973). <sup>3</sup> А. Н. Тихонов, Матем. сб., т. 42, № 2, 199 (1937). <sup>4</sup> О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, Матем. сб., т. 95 (137), (1-9), 130 (1974). <sup>5</sup> В. А. Солонников, Тр. Матем. инст. им. В. А. Стеклова АН СССР, т. 33 (1965). <sup>6</sup> О. А. Ладыженская, В. А. Солонников, Н. Н. Уралыцева, Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа, «Наука», 1967. <sup>7</sup> М. С. Агранович, М. И. Вишик, УМН, т. 19, в. 3 (117), 53 (1964). <sup>8</sup> S. Agmon, A. Douglis, L. Nirenberg, Comm. Pure and Appl. Math., v. 17, № 1, 35 (1964). <sup>9</sup> О. А. Олейник, Е. В. Радкевич, УМН, т. 28, в. 4 (172), 223 (1973).