Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 5

УДК 532.592

ГИДРОМЕХАНИКА

Я. И. СЕКЕРЖ-ЗЕНЬКОВИЧ

К ТЕОРИИ СОСТАВНЫХ УСТАНОВИВШИХСЯ КАПИЛЛЯРНО-ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ

(Представлено академиком А. Ю. Ишлинским 26 VII 1974)

Установившиеся волны конечной амплитуды, вызванные давлением, периодически распределенным вдоль поверхности жидкости, и пропадающие при переходе этого давления в постоянное, названы вынужденными, в отличие от свободных волн, существующих при постоянном на поверхности давлении, но при особых значениях скорости потока. Аналогичные волны названы составными установившимися, если при переходе давления на поверхности в постоянное они не пропадают, а преобразуются в свободные. Дается точное решение задачи о таких капиллярно-гравитационных волнах для жидкости бесконечной глубины, если давление на поверхности задано некоторым бесконечным тригонометрическим рядом. Здесь кратко излагаются полученные нами результаты. В нашей работе ([1]) была рассмотрена аналогичная задача для чисто гравитационных волн.

Рассмотрим плоскопараллельное установившееся движение идеальной несжимаемой тяжелой жидкости, ограниченной только сверху свободной поверхностью, на которой давление $p_0=p_0'+p_0(x)$; при этом $p_0'=\mathrm{const}$, а $p_0(x)$ является заданной периодической функцией от горизонтальной координаты x. Пусть поток движется слева направо с постоянной заданной скоростью c на бесконечной глубине. Благодаря периодичности функции $p_0(x)$ свободная поверхность принимает форму неподвижной периодической волны в координатах, связанных с прогрессивной волной, имеющей скорость $-c$. Ищем волны, которые не пропадают, а переходят в свободные при $p_0(x)\equiv 0$ и специальных значениях скорости c. Такие волны, как указано выше, названы составными.

Пусть искомая составная волна и давление $p_0(x)$ обладают симметрией относительно вертикали гребня волны. Совместим ось Oy прямоугольной системы координат xOy с осью симметрии и направим ее вертикально вверх. За начало координат O примем точку пересечения оси Oy со свободной поверхностью, а ось Ox направим вправо.

Плоскость течения xOy примем за плоскость комплексного переменного $z=x+iy$ и пусть φ — потенциал скоростей, ψ — функция тока, $w=\varphi+i\psi$ — комплексный потенциал скоростей.

Для вывода уравнений задачи мы сначала отобразим конформно область, занятую одной волной и являющуюся бесконечной вертикальной полуполосой, ограниченной сверху волнообразной кривой, на полуполосу $0\leqslant\varphi\leqslant c\lambda$, $0\leqslant\psi\leqslant\infty$ в плоскости w, а затем эту полуполосу на внутренность единичного круга с центром в нуле плоскости $u=u_1+iu_2$. При этом предполагается, что длина волны λ совпадает с периодом функции $p_0(x)$. Как известно, последнее отображение дается формулой

$$w=\frac{\lambda c}{2\pi i}\ln u, \tag{1}$$

причем профиль волны перейдет в окружность единичного круга с разрезом вдоль радиуса $\arg u=0$.

Выражение z через u определяется из соотношения

$$\frac{dz}{du}=-\frac{\lambda}{2\pi i}\frac{\exp[i\omega(u)]}{u}; \tag{2}$$

здесь

$$\omega(u)=\Phi+i\tau. \tag{3}$$

Функция $\omega(u)$, как голоморфная, представляется внутри круга рядом Тэйлора с действительными коэффициентами в силу симметрии волны. Из (2) и (3) при $u=e^{i\theta}$ (θ — угол радиуса-вектора с осью u_1) получаем параметрическое уравнение профиля волны

$$x=-\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\cos\Phi(\eta)\,d\eta,\qquad y=-\frac{\lambda}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta)\,d\eta; \tag{4}$$

здесь $\tau(\eta)=\tau(1,\eta)$, $\Phi(\eta)=\Phi(1,\eta)$.

Из предыдущего следует, что всюду в потоке функция Φ равна углу вектора скорости $\mathbf{q}$ с осью Ox и что

$$q=|\mathbf{q}|=c\exp(\tau). \tag{5}$$

Из интеграла Бернулли для поверхности, учтя (5) и по закону Лапласа силы поверхностного натяжения, после выделения линейных относительно Φ и τ слагаемых и определения y по второй формуле (4), получаем

$$\frac{d\Phi}{d\theta}=\nu\left\{\delta-1-(\delta+1)\tau+\varkappa\int_0^\theta\Phi(\eta)\,d\eta-S(\theta)(1-\tau)+F[\tau,\Phi,S,\delta]\right\},$$

$$F[\tau,\Phi,S,\delta]=\delta(e^{-\tau}-1+\tau)-(e^\tau-1-\tau)+\varkappa e^{-\tau}\int_0^\theta[e^{-\tau(\eta)}\sin\Phi(\eta)-\Phi(\eta)]\,d\eta-$$

$$-\varkappa\int_0^\theta\Phi(\eta)\,d\eta+\varkappa e^{-\tau}\int_0^\theta\Phi(\eta)\,d\eta-S(\theta)(e^{-\tau}-1+\tau), \tag{6}$$

где

$$\delta=2(C\rho-p_0')/(\rho c^2),\qquad \nu=\lambda c^2/(4\pi\mu),$$
$$\varkappa=g\lambda/(\pi c^2),\qquad p_0^*(x)=2p_0(x)/(\rho c^2); \tag{7}$$

C — константа в интеграле Бернулли, g — ускорение силы тяжести, ρ — плотность, μ — капиллярная постоянная. Кроме того, положено

$$p_0^*(x)=\sum_{n=1}^\infty\varepsilon^{n+2}d_n\cos\frac{2\pi n}{\lambda}x,\qquad S(\theta)=p_0^*[x(\theta)], \tag{8}$$

где ε — малый положительный параметр, d_n — заданные действительные числа, причем ряд $\sum\varepsilon^n d_n$ сходится в круге радиуса $\varepsilon_0>0$.

Для получения $S(\theta)$ следует в (8) подставить $x(\theta)/\lambda$ из уравнения

$$\frac{x(\theta)}{\lambda}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^\theta e^{-\tau(\eta)}\cos\Phi(\eta)\,d\eta, \tag{9}$$

вытекающего из (4).

Уточним выражения для параметров. В случае свободной волны $S(\theta)\equiv0$ и надо положить $c^2=c_*^2(1-\varepsilon^2)$; при этом c_*^2 выражается по формуле для свободной линейной волны длины λ [1]. Это же значение c^2 принимаем и для составной волны, считая ε тем же параметром, как в (8). Это значение c^2 следует подставить в формулы (7) и учесть обозначения: $\nu^{(0)}=\lambda\rho c_*^2/(4\pi\mu)$ и $\varkappa_0=g\lambda/(\pi c_*^2)$.

Учтя новые выражения параметров, преобразуем в (6) слагаемые линейные относительно τ, Φ и ε, применяя, как и в ([2], [3]), формулы Дини и интегрирование по частям. Затем в фигурной скобке — множителе при $\nu^{(0)}$ объединяем слагаемые (с коэффициентами 2 и $-\varkappa_0$) с одинаковой подынтегральной функцией $d\Phi/d\eta$ и различными ядрами:

$$K(\eta,\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\cos n\theta}{n},\qquad K_2(\eta,\theta)=\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\eta\cos n\theta}{n^2}.$$

В уравнении (6) константы $\nu^{(0)}$ и $\varkappa_0$, зависящие от c_*^2, считаются заданными, а δ определяется из условия периодичности $\Phi(\theta+2\pi)=\Phi(\theta)$, которое (с учетом его при $\varepsilon\to0$) дает

$$\delta=1+\delta'(\varepsilon). \tag{10}$$

После всех преобразований и с учетом (10) уравнение (6) примет окончательный вид

$$\zeta(\theta)=\nu_1\left\{\int_0^{2\pi}K^*(\eta,\theta)\zeta(\eta)d\eta+\delta'(\varepsilon)+\delta'(\varepsilon)\int_0^{2\pi}K(\eta,\theta)\zeta(\eta)d\eta+\right.$$
$$\left.+\varkappa_0\int_0^{2\pi}K_2(\eta,0)\zeta(\eta)d\eta+\Psi(\theta,\varepsilon)\right\}-\nu_1\varepsilon^2\left\{2\int_0^{2\pi}K(\eta,\theta)\zeta(\eta)d\eta-\right.$$
$$\left.-\varkappa_0\int_0^{2\pi}K_2(\eta,\theta)\zeta(\eta)d\eta+\ldots\right\} \tag{11}$$

(многоточие во второй фигурной скобке заменяет члены из первой, начиная со второго); здесь

$$\zeta(\theta)=d\Phi/d\theta,\qquad \Psi(\theta,\varepsilon)=\varkappa_0\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^{2n}\int_0^{\theta}\Phi(\eta)d\eta-$$
$$-S(\theta)\left(1+\int_0^{2\pi}K(\eta,\theta)\zeta(\eta)d\eta\right)+F[\tau,\Phi,S,1+\delta'(\varepsilon)], \tag{12}$$

$$K^*(\eta,\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varphi_n(\eta)\varphi_n(\theta)}{\nu_n},\qquad \nu_n=\frac{n^2}{2n-\varkappa_0},\qquad \varphi_n(\theta)=\frac{\cos n\theta}{\pi^{1/2}};$$

ν_n — собственные значения, $\varphi_n(\theta)$ — собственные функции ядра $K^*(\eta,\theta)$. Кроме того, положено $\nu^{(0)}=\nu_1$; параметр $\varkappa_0$ выбран так, чтобы собственное значение ν_1 было простым и положительным ([2], [3]). Заметим, что при $\nu^{(0)}=\nu_1$ величина c_*^2 будет иметь, как можно показать, требуемое выражение. Если считать, что в выражении Ψ функция $\tau(\theta)$ взята так же, как и в ([2]), и $\Phi(\theta)=\int_0^{\theta}\zeta(\eta)d\eta$, то (11) будет нелинейным интегральным уравнением для $\zeta(\theta)$.

Условие периодичности для функции $\Phi(\theta)$ дает соотношение

$$\delta'(\varepsilon)=-\varkappa_0\int_0^{2\pi}K_2(\eta,0)\zeta(\eta)d\eta+$$
$$+\varepsilon^2\left[\delta'(\varepsilon)+\varkappa_0\int_0^{2\pi}K_2(\eta,0)\zeta(\eta)d\eta\right]-\frac{1-\varepsilon^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Psi(\theta,\varepsilon)d\theta. \tag{13}$$

Таким образом, задача свелась к определению двух функций $\zeta(\theta, \varepsilon)$ и $x(\theta, \varepsilon)/\lambda$ и константы $\delta=1+\delta'(\varepsilon)$ из трех нелинейных уравнений (9), (12) и (13) с учетом формулы Дини [2] для $\tau(\theta)$ и при $\Phi(\theta, \varepsilon)=\int_0^\theta \zeta(\eta, \varepsilon)d\eta$. При решении основным является нелинейное интегральное уравнение (11) относительно $\zeta(\theta, \varepsilon)$. Остальные уравнения — нелинейные трансцендентные относительно искомых функций и константы. Решение системы ищется в виде рядов по степеням параметра ε. Для каждого коэффициента разложения функции $\zeta(\theta, \varepsilon)$ получается линейное интегральное уравнение Фредгольма второго рода с ядром $K^*(\eta, \theta)$ и параметром $\nu^{(0)}=\nu_1$ — первому собственному значению этого ядра. Для коэффициента первого приближения получается однородное интегральное уравнение, которое решается по второй теореме Фредгольма. Уравнения для коэффициентов всех последующих приближений будут неоднородными. Они решаются по третьей теореме Фредгольма и решение каждого такого уравнения выражается в виде суммы из решения однородного уравнения с неопределенным коэффициентом C_{1n} и частного решения неоднородного интегрального уравнения. Коэффициент C_{1n} определяется из условия разрешимости уравнения для $(n+2)$-го приближения. Для коэффициента C_{11} получается неполное кубическое уравнение (15), для остальных C_{1j} получаются линейные уравнения.

Кубическое уравнение для C_{11} содержит коэффициент d_1 переменного давления. При $d_1=0$ это уравнение обращается в уравнение для C_{11} в случае свободной волны.

Для коэффициентов разложений остальных искомых величин получается всегда разрешимая система линейных алгебраических уравнений. Применяя методы Ляпунова — Шмидта с использованием диаграммы Ньютона [4], доказываем, что рассмотренные ряды абсолютно и равномерно сходятся при $0\leqslant\theta\leqslant2\pi$ и малых значениях $|\varepsilon|<\varepsilon_1\leqslant\varepsilon_0$ и дают единственное малое относительно ε и непрерывное по θ решение задачи.

Рассчитаны первые три приближения решения задачи.

Профиль волны в параметрической форме $x(\theta, \varepsilon)$ и $y(\theta, \varepsilon)$ определяется из соотношений (4). Исключая из параметрических уравнений θ, получаем уравнение профиля в форме $y=y(x, \varepsilon)$.

Приводим приближенное с точностью до членов третьего порядка уравнение профиля волны, положив $k=2\pi/\lambda$:

$$y(x, \varepsilon)=-\frac{1}{k}\Big\{\varepsilon C_{11}(\cos kx-1)+{}^1/_4\varepsilon^2(C_{11}^2-C_{22})(1-\cos 2kx)+$$
$$+{}^1/_6\varepsilon^3[(6C_{13}+{}^9/_4C_{11}C_{22})(\cos kx-1)+({}^1/_3C_{11}^3-{}^5/_4C_{11}C_{22}+{}^2/_3C_{33})(\cos 3kx-1)]\Big\}; \tag{14}$$

где

$$C_{12}=0, \qquad C_{22}=-{}^3/_4\varkappa_0C_{11}^2\nu_1\nu_2/(\nu_2-\nu_1),$$
$$C_{33}={}^1/_{12}C_{11}[C_{11}^2(1-{}^{11}/_3\varkappa_0)-{}^{13}/_2\varkappa_0C_{22}]\nu_1\nu_3/(\nu_3-\nu_1);$$

C_{13} не вычислен, так как пятое приближение не определялось; C_{11} — находится из уравнения

$$[{}^1/_4+{}^9/_{32}\varkappa_0^2\nu_1\nu_2/(\nu_2-\nu_1)]C_{11}^3-2C_{11}-d_1=0. \tag{15}$$

По условию задачи начало координат помещено в гребне волны. Поэтому из анализа главного члена в (14) следует, что должно быть $C_{11}>0$. Из уравнения (15) вытекает, что для этого надо считать $d_1>0$.

Институт проблем механики
Академии наук СССР
Москва

Поступило
25 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Я. И. Секерж-Зенькович*, Прикл. матем. и мех., т. 33, в. 4, 648 (1969). [2] *Я. И. Секерж-Зенькович*, ДАН, т. 195, № 2, 303 (1970). [3] *Я. И. Секерж-Зенькович*, Прикл. матем. и мех., т. 34, в. 6, 1085 (1970). [4] *М. М. Вайнберг, В. А. Треногин*, УМН, т. 17, в. 2 (104), 13 (1962).