Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 5

УДК 513.83 МАТЕМАТИКА

Г. СКОРДЕВ, Ю. М. СМИРНОВ

ФАКТОРИЗАЦИОННАЯ И АППРОКСИМАЦИОННАЯ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ КОГОМОЛОГИЙ АЛЕКСАНДРОВА — ЧЕХА В КЛАССЕ БИКОМПАКТОВ

(Представлено академиком П. С. Александровым 26 VIII 1974)

Мардежич ([1]) показал, что всякий бикомпакт является пределом обратного спектра из компактов той же размерности (аппроксимационная теорема). Для этого он доказал ([1]), что в категории бикомпактов всякое отображение f: $X\to Y$ обладает таким «фактор-отображением» $\tilde{f}$: $\tilde{X}\to Y$, что $\dim\tilde{X}\leqslant\dim X$, $w\tilde{X}\leqslant wY$ и $\tilde{f}\circ p=f$, где $\tilde{X}$ — фактор-пространство бикомпакта X по некоторой эквивалентности, а p: $X\to\tilde{X}$ — естественная проекция * (факторизационная теорема).

С. Богатый и Ю. М. Смирнов ([2]) доказали обе эти теоремы в категории LC^n (бикомпактов, локально-связных в размерности n) и в категории $C^n\cap\mathrm{LC}^n$ (бикомпактов, связных и локально-связных в размерности n) **.

Здесь мы доказываем обе эти теоремы в категории clc^n (бикомпактов, когомологически локально-связных в размерности n).

Перед подробными формулировками напомним

Определения. Под когомологиями мы понимаем приведенные когомологии Александрова — Чеха с коэффициентами в абелевой группе G (см., например, ([3]), гл. 2, §§ 2, 16). Бикомпакт X называется когомологически локально-связным в размерности n (во всех размерностях), если для всякой его точки x и всякой ее замкнутой окрестности V найдется такая замкнутая окрестность U точки x, что $U\subset V$ и что гомоморфизмы i^*: $\mathscr{H}^k(V)\to\mathscr{H}^k(U)$, порожденные вложением i: $U\to V$, тривиальны для всех $k\leqslant n$ (соответственно для всех k). Будем писать в этом случае так: $X\in\mathrm{clc}^n$ (соответственно $X\in\mathrm{clc}^\infty$).

Теорема 1 (факторизационная). *Для любого отображения f: $X\to Y$ бикомпакта $X\in\mathrm{clc}^n$ (соответственно clc^∞) в бикомпакт Y бесконечного веса существуют такие отображения p: $X\to\tilde{X}$ и $\tilde{f}$: $\tilde{X}\to Y$, что:*

а) $\tilde{X}\in\mathrm{clc}^n$ *(соответственно* clc^∞),

б) $\dim_G\tilde{X}\leqslant\dim_G X$ *при* $\dim_G X\leqslant n$ *(соответственно всегда* ***),

в) *гомоморфизмы* p^*: $\mathscr{H}^k(\tilde{X})\to\mathscr{H}^k(X)$ *являются изоморфизмами для всех* $k\leqslant n$ *(соответственно для всех* k) *и выполняются все остальные условия факторизационной теоремы Мардежича.*

Теорема 2 (аппроксимационная). *Всякий бикомпакт $X\in\mathrm{clc}^n$ (соответственно clc^∞) является пределом такого обратного спектра с предельными проекциями p_α: $X\to X_\alpha$, что:*

а) $X_\alpha\in\mathrm{clc}^n$ *(соответственно* clc^∞) *для всех* α,

б) $\dim_G X_\alpha=\dim_G X$ *при* $\dim_G X\leqslant n$ *(соответственно всегда)*,

---

* Под компактами мы понимаем метризуемые бикомпакты, под отображениями — непрерывные отображения. Через $\dim X$ обозначаем размерность, определенную с помощью покрытий, через wY — вес пространства Y.

** Y может и не принадлежать данной категории, так как его можно вложить в тихоновский куб того же веса.

*** Под $\dim_G X$ мы понимаем когомологическую размерность по группе G (см. ([4]), стр. 7).

в) *гомоморфизмы* p_α^*: $\mathscr{H}^k(X_\alpha)\to\mathscr{H}^k(X)$ *являются изоморфизмами для всех* α *и всех* $k\leq n$ (*соответственно для всех* k) *и выполняются все остальные условия аппроксимационной теоремы Мардежича* ($wX_\alpha\leq\aleph_0$, $\dim X_\alpha=\dim X$).

Усложняя доказательство и применяя метод Бокштейна ([4]), получаем

Теоремы 3 и 4. *Если в условиях теорем* 1 *и* 2 $X\in\mathrm{clc}^n$ (*соответственно* clc^∞) *для всех групп системы Бокштейна, то в утверждениях можно потребовать, чтобы свойства* а), б) *и* в) *выполнялись для всех абелевых групп.*

Используя дополнительно некоторые приемы работы ([2]), получим

Теоремы 5 и 6. *Если в условиях теорем 3 и 4* $X\in\mathrm{LC}^n$ (*соответственно* LC^∞), *то в* а) *можно потребовать, чтобы* $\widetilde{X}\in\mathrm{LC}^n$ (*соответственно* LC^∞).

Следствие. *Если, кроме того, в теореме* 6 $\dim X\leq n$ (*соответственно* $\dim X<\infty$), *то в* а) *можно потребовать, чтобы* $X_\alpha\in\mathrm{ANR}$ *для всех* α *.

Доказательство теоремы 1 следует методу Архангельского ([5]). Рассмотрим следующие операции над семейством $\mathfrak{A}$ конечных открытых покрытий пространства X:

$\wedge$) Семейство $\mathfrak{A}^\wedge$ состоит из всех покрытий

$$\omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_s=\{U_1\cap\ldots\cap U_s\,|\,U_i\in\omega_i\in\mathfrak{A}\text{ для любого } i\}.$$

$*$) Операция $*$ каждому открытому конечному покрытию ω сопоставляет некоторое конечное открытое покрытие ω^*, звездно-вписанное в ω, а системе $\mathfrak{A}$ — систему $\mathfrak{A}^*$, состоящую из покрытий ω^*, выбранных по одному для каждого $\omega\in\mathfrak{A}$.

n-dim) Операция n-dim каждому открытому конечному покрытию ω сопоставляет некоторое конечное открытое покрытие $\omega^{n\text{-dim}}$ кратности $\leq n+1$, вписанное в ω, а системе $\mathfrak{A}$ — систему $\mathfrak{A}^{n\text{-dim}}$, состоящую из покрытий $\omega^{n\text{-dim}}$, выбранных по одному для каждого $\omega\in\mathfrak{A}$.

n-clc) Эта операция каждому конечному открытому покрытию ω сопоставляет некоторое такое конечное открытое покрытие $\omega^{n\text{-clc}}$, что всякий его элемент U содержится в некотором таком элементе $V\in\omega$, что гомоморфизм i^*: $\mathscr{H}^k(\overline{V})\to\mathscr{H}^k(\overline{U})$ тривиален для всех $k\leq n$ **, а системе $\mathfrak{A}$ — систему $\mathfrak{A}^{n\text{-clc}}$, состоящую из покрытий $\omega^{n\text{-clc}}$, выбранных по одному для каждого $\omega\in\mathfrak{A}$.

clc) Операция clc определяется аналогично, с заменой слов «для всех $k\leq n$» на слова «для всех k».

Нетрудно проверить, что операция n-clc определена для любого бикомпакта класса clc^n, операция clc — для любого бикомпакта класса clc^∞, операция n-dim — для любого нормального пространства размерности $\dim X\leq n$, операция $*$ — для любого нормального пространства, а $\wedge$ — для любого пространства.

Пусть теперь выполнены условия теоремы 1. В Y существует база $\mathfrak{B}$ бесконечной мощности $\tau=wY$. Обозначим через $\mathfrak{B}^0$ систему всех конечных открытых покрытий бикомпакта Y, составленных из элементов базы $\mathfrak{B}$, а через $\mathfrak{A}^0$ — систему всех конечных открытых покрытий $\omega'=\{U'=fU\,|\,U\in\omega\in\mathfrak{B}^0\}$. Система $\mathfrak{B}^0$ и система $\mathfrak{A}^0$ имеют мощность τ. Применяя к системе $\mathfrak{A}^0$ операции $\wedge$, $*$, m-dim и n-clc, если $X\in\mathrm{clc}^n$ и m-$\dim X\leq n$, мы всегда будем получать системы мощности $\leq\tau$.

Построим по индукции системы $\widetilde{\mathfrak{A}}^k$ и $\mathfrak{A}^k$, применяя в следующем порядке наши операции: пусть $\widetilde{\mathfrak{A}}^k=(\mathfrak{A}^k)^{n\text{-clc}}$, а $\mathfrak{A}^{k+1}=(\widetilde{\mathfrak{A}}^k)^{\wedge * \, m\text{-dim}}$. Система $\mathfrak{A}^\infty=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\mathfrak{A}^k$ имеет мощность τ и состоит из покрытий кратности $\leq m+1$. Определим на X отношение эквивалентности ∞, полагая $x\infty x'$, если $x\in\mathrm{St}_\omega x'$ для всех $\omega\in\mathfrak{A}^\infty$ ***. Нетрудно проверить, что это и в самом деле эквива-

* Т. е. были абсолютными окрестностными ретрактами.

** Через $\overline{V}$ мы обозначаем замыкание множества V.

*** Через $\mathrm{St}_\omega x'$ обозначаем звезду $\cup U|x'\in U\in\omega$ точки x относительно ω.

лентность. Искомый бикомпакт $\tilde{X}$ — фактор-пространство бикомпакта X по отношению ∞, а отображение p — естественная проекция: $p(x)=K_x$, где K_x — класс, содержащий точку x. Искомое отображение $\tilde{f}$ определяется формулой $\tilde{f}(K_x)=f(x)$. Отображение $\tilde{f}$ не зависит от выбора представителя x класса $K=K_x$ и непрерывно.

Несмотря на все наши изменения, так же как и у Архангельского ([5]), доказывается, что:

1°) $\tilde{X}$ — хаусдорфово пространство, а, значит, и бикомпакт, и

2°) для всякого открытого ω бикомпакта $\tilde{X}$ в покрытие $\omega'=\{p^{-1}U \mid U\in\omega\}$ можно вписать покрытие системы $\mathfrak{A}^\infty$; для этого нужны лишь операции $\bigwedge$ и $*$. Отсюда следует, что $\dim \tilde{X}\leqslant m=\dim X$. Так как мощность системы $\mathfrak{A}^\infty$ равна τ, а каждое покрытие этой системы конечно, то в силу 2° вес $w\tilde{X}\leqslant\tau=wY$.

Чтобы вывести свойства а)—в), нужна следующая известная теорема Вьеториса — Бигля ([6]): *если отображение p: $X\to\tilde{X}$ бикомпакта X на бикомпакт $\tilde{X}$ ациклично в размерности n (соответственно ациклично), то гомоморфизмы p^*: $\mathscr{H}^k(\tilde{X})\to\mathscr{H}^k(X)$, порожденные отображением p, будут изоморфизмами для всех $k\leqslant n$ (соответственно для всех k).*

Напомним, что отображение p: $X\to\tilde{X}$ называется **ацикличным в размерности** n (соответственно **ацикличным**), если $\mathscr{H}^k(p^{-1}\tilde{x})=0$ для всех $\tilde{x}\in\tilde{X}$ и для всех $k\leqslant n$ (соответственно для всех k).

Кроме того еще потребуется одно непосредственное следствие свойства непрерывности когомологий Александрова — Чеха (см. ([3]), гл. II):

Лемма. *Если для любой окрестности V замкнутого множества K бикомпакта X найдется такая окрестность U множества K, что $U\subset V$ и что гомоморфизм i^*: $\mathscr{H}^l(\bar{V})\to\mathscr{H}^l(\bar{U})$ тривиален, то $\mathscr{H}^l(K)=0$.*

Покажем теперь, продолжая доказательство, что отображение p ациклично в размерности n. Пусть V — произвольная окрестность произвольной точки $\tilde{x}$ в $\tilde{X}$, а $K=p^{-1}(\tilde{x})$ и $x\in K$. По определению $K=\bigcap \mathrm{St}_\omega x \mid \omega\in\mathfrak{A}^\infty$. Легко показать, что $K=\bigcap \overline{\mathrm{St}_\omega x} \mid \omega\in\mathfrak{A}^\infty$ (существенна операция $*$). Система $\{\overline{\mathrm{St}_\omega x} \mid \omega\in\mathfrak{A}^\infty\}$ центрирована, т. е. для любого конечного набора покрытий $\omega_1\ldots\omega_s$ найдется такое покрытие ω, что $\overline{\mathrm{St}_\omega x}\subset \bigcap\limits_{i=1}^{s} \overline{\mathrm{St}_{\omega_i} x}$ (существенна операция $\bigwedge$). Отсюда в силу бикомпактности множеств $\overline{\mathrm{St}_\omega x}$ следует, что существует такое покрытие $\omega\in\mathfrak{A}^\infty$, что $\overline{\mathrm{St}_\omega x}\subset V$. Так как $\omega\in\mathfrak{A}^k$ при некотором k, то найдется и такое покрытие $\omega'\in\tilde{\mathfrak{A}}^{k+1}$, что $\omega'=\omega^{n\text{-clc}}$. По определению системы $\mathfrak{A}^{k+1}$ существует такое покрытие $\omega_*\in\mathfrak{A}^{k+1}$, которое звездно вписано в ω'. Так как $\omega_*\in\mathfrak{A}^\infty$, то $K\subset \mathrm{St}_{\omega_*}x$. Так как ω_* звездно вписано в ω', то $\mathrm{St}_{\omega_*}x\subset U'$ при некотором $U'\in\omega'$. Значит, U' — окрестность множества K. Так как $U'\in\omega^{n\text{-clc}}$, то найдется такое $U\in\omega$, что $U\subset U'$ и что гомоморфизм i^*: $\mathscr{H}^k(\bar{U}')\to\mathscr{H}^k(\bar{U})$ тривиален для всех $k\leqslant n$. Отсюда видим, что и гомоморфизм i^*: $\mathscr{H}^k(\bar{V})\to\mathscr{H}^k(\bar{U})$ тривиален для всех $k\leqslant n$, так как $U'\subset V$. Значит, поскольку точка $\tilde{x}$ и окрестность V множества $K=p^{-1}(\tilde{x})$ были выбраны произвольно (и $U\supset K$), по лемме отображение p ациклично в размерности n. А тогда по теореме Вьеториса — Бигля выполнено искомое свойство в).

Докажем свойство а). Пусть W — произвольная замкнутая окрестность произвольной точки $x\in\tilde{X}$. Тогда множество $p^{-1}W$ будет замкнутой окрестностью множества $K=p^{-1}(\tilde{x})$. По доказанному выполнено условие леммы и, значит, найдется такая замкнутая окрестность V множества K, что гомоморфизм i^*: $\mathscr{H}^k(p^{-1}W)\to\mathscr{H}^k(V)$ тривиален для всех $k\leqslant n$. Так как p — замкнутое отображение, то существует такая замкнутая окрестность U точки $\tilde{x}$, что $p^{-1}U\subset V$. Тогда гомоморфизм i^*: $\mathscr{H}^k(p^{-1}W)\to\mathscr{H}^k(p^{-1}U)$ также будет тривиален для всех $k\leqslant n$. Так как p ациклично в размерности n, то гомоморфизм $p_W{}^*$: $\mathscr{H}^k(p^{-1}W)\to\mathscr{H}^k(W)$ и $p_U{}^*$: $\mathscr{H}^k(p^{-1}U)\to\mathscr{H}^k(U)$, порожденные ограничениями p_W и p_U отображения p на множествах $p^{-1}W$ и

$p^{-1}U$ соответственно, будут изоморфизмами для всех $k \leqslant n$. Отсюда легко следует, что и гомоморфизмы $i^*\colon \mathscr{H}^k(W) \to \mathscr{H}^k(U)$ будут тривиальными при всех $k \leqslant n$. Поэтому свойство а) оказывается выполненным.

Пусть теперь $k = \dim_G X \leqslant n$. Возьмем в $\tilde{X}$ замкнутые множества B и $A \subset B$. Тогда множества $p^{-1}B$ и $p^{-1}A$ замкнуты в бикомпакте X. По одной теореме Коэна ([7]) (см. еще ([4]), стр. 7) гомоморфизм $i^*\colon \mathscr{H}^k(p^{-1}B) \to \mathscr{H}^k(p^{-1}A)$ будет эпиморфизмом. Отсюда с помощью изоморфизмов $p_B^*\colon \mathscr{H}^k(p^{-1}B) \to \mathscr{H}^k(B)$ и $p_A^*\colon \mathscr{H}^k(p^{-1}A) \to \mathscr{H}^k(A)$ получим, что гомоморфизм $i^*\colon \mathscr{H}^k(B) \to \mathscr{H}^k(A)$ также будет эпиморфизмом. Значит, по той же теореме Коэна и в силу произвольности выбора множеств B и $A \subset B$ получим, что $\dim_G \tilde{X} \leqslant k = \dim_G X$. Этим «с точностью до» свойства clc^∞ теорема 1 доказана. Оставшееся доказывается аналогично.

Чтобы получить теорему 3, надо занумеровать все группы Γ_i системы Бокштейна (см. ([4]), стр. 13, 14), чтобы каждая из них повторялась бесконечное число раз, а в доказательстве положить $\mathfrak{A}^k = (\tilde{\mathfrak{A}}^k)^{n\text{-clc}}$, где свойство n-clc определено с помощью группы Γ_k. Тогда $\dim_{\Gamma_i} \tilde{X} \leqslant \dim_{\Gamma_i} X$ согласно теореме 1 для всех i, откуда в силу первой теоремы Бокштейна (см. ([4]), стр. 14) и $\dim_G \tilde{X} \leqslant \dim_G X$ для всех абелевых групп G. Рассуждениями, аналогичными тем, которыми доказывается эта теорема Бокштейна, можно получить, что если $p^*\colon \mathscr{H}_\Gamma{}^k(\tilde{X}) \to \mathscr{H}_\Gamma{}^k(X)$ является изоморфизмом для каждой группы Γ из системы Бокштейна, то это будет верно и для каждой абелевой группы Γ, а если гомоморфизмы $i^*\colon \mathscr{H}_\Gamma{}^k(V) \to \mathscr{H}_\Gamma{}^k(U)$ (где V и U — замкнутые окрестности точки $\tilde{x} \in \tilde{X}$) тривиально для всех групп Γ Бокштейна, то это будет верно и для всех абелевых групп Γ. Отсюда легко получить, что $\tilde{X} \in \mathrm{clc}^n$ (соответственно clc^∞) для всех абелевых групп.

Теорему 5 получим, если в доказательстве теоремы 4 применим операцию n-LC (соответственно LC), использованную в ([2]). Следствие вытекает из теоремы 5 и одной теоремы Борсука (см. ([8]), V.10.3). Наконец, теоремы 2, 4 и 6 получаются из теорем 1 и соответственно 3 и 5 точно так же, как в работе ([2]) теорема 5 из теоремы 4.

Математический институт
София, Народная Республика Болгария

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
4 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *S. Mardešić*, Illin. Math. J., v. 4, № 2, 278 (1960). [2] *С. Богатый, Ю. М. Смирнов*, Fund. Math., in press. [3] *G. Bredon*, Sheaf Theory, N. Y., 1967. [4] *В. И. Кузьминов*, УМН, т. 23, № 5, 2 (1968). [5] *А. В. Архангельский*, ДАН, т. 174, № 6, 1243 (1967). [6] *E. G. Gegle*, Mich. Math. J., v. 3, № 2, 179 (1956). [7] *H. Cohen*, Duke Math. J., v. 21, № 2, 209 (1954). [8] *К. Борсук*, Теория ретрактов, М., 1971.