Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 5

УДК 517.951

МАТЕМАТИКА

В. П. ТАНАНА

ОБ ОПТИМАЛЬНОСТИ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕУСТОЙЧИВЫХ ЗАДАЧ

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 19 VIII 1974)

1. Изучение методов решения нелинейных неустойчивых задач было начато в работах А. Н. Тихонова ([1], [2]) и В. К. Иванова ([3]). В настоящей работе продолжается изучение методов решения нелинейных задач.

Пусть X, Y — линейные нормированные пространства, A — непрерывный взаимно однозначный оператор с областью определения $D_A=X$ и областью значений $R_A\subseteq Y$.

Рассмотрим операторное уравнение первого рода

$$Ax=y,\quad x\in D_A,\quad y\in Y. \tag{1}$$

Предположим, что при $y=y_0$ существует точное решение x_0 уравнения (1) такое, что $x_0\in R_B$, где R_B — область значений усиленно непрерывного оператора B (см. ([7])), отображающего рефлексивное банахово пространство Z в X, но точное значение правой части y_0 неизвестно. Вместо него дано некоторое приближение $\bar{y}$. Требуется по $\bar{y}$ найти приближенное решение уравнения (1), в каком-то смысле близкое к точному решению x_0.

Для того чтобы по $\bar{y}$ можно было дать устойчивое приближенное решение $\bar{x}$ уравнения (1), необходима дополнительная информация о точном решении x_0. Эта информация может быть различной. По ней встречающиеся в теории и практике нелинейные неустойчивые задачи (см. ([2-4])) можно разделить на две группы.

Отнесем к первой группе те задачи, у которых в качестве дополнительной информации известен уровень погрешности δ начального данного $\bar{y}$: $\|\bar{y}-y_0\|<\delta$ (см. ([2], [3])); к задачам второй группы — те, у которых в качестве дополнительной информации известна константа M такая, что $x_0\in BS_M$, где S_M — шар радиуса M с центром в точке 0 (см. ([4])).

В дальнейшем задачи первой группы будем называть задачами I типа, задачи второй группы — задачами II типа.

Методом решения некорректно поставленной задачи произвольного типа естественно считать любое отображение P (вообще говоря, многозначное) с областью определения $D_P=Y$ и областью значений $R_P\subset X$, которое начальным данным ставит в соответствие множество приближенных решений $\bar{X}=P\bar{y}$ уравнения (1).

При этом можно ввести количественную характеристику точности метода P на классе корректности $\mathfrak{M}=BS_M$ следующим образом:

$$\Delta(P)=\sup_{\substack{x_0\in\mathfrak{M}\\ \|\bar{y}-Ax_0\|<\delta}}\beta(P\bar{y},x_0),$$

где $\beta(U,V)=\sup\limits_{x\in U}\inf\limits_{x'\in V}\|x-x'\|$, а $U,V\subset X$.

Метод P_{opt} будем называть *оптимальным на классе* $\mathfrak{M}$, если

$$\Delta(P_{\text{opt}})=\inf_{P\in P(Y,X)}\Delta(P),$$

где $P(Y,X)$ — множество всех отображений P с областью определения $D_P=Y$ и областью значений $R_P\subset X$.

Метод $\overline{P}$ будем называть оптимальным по порядку на классе $\mathfrak{M}$, если $\Delta(\overline{P}) \sim \Delta(P_{\text{opt}})$.

2. Об оптимальности методов невязки и аппроксимативной невязки при решении задач I типа. Метод невязки ([3], [5], [6]) решения задачи I типа заключается в нахождении по $\bar{y}$ множества $\tilde{X} \subset R_B$ такого, что $\tilde{X} = B\tilde{Z}$, где множество $\tilde{Z}$ удовлетворяет следующему условию: для любого $\tilde{z} \in \tilde{Z}$

$$\|\tilde{z}\| = \inf_{\|ABz - \bar{y}\| \leqslant \delta} \|z\|.$$

Через $\tilde{P}$ обозначим отображение, которое начальным данным $\bar{y} \in R_A + S_\delta(0)$, где $S_\delta(0) = \{y \colon \|y\| \leqslant \delta\}$, ставит в соответствие приближенное решение $\tilde{X}$, полученное методом невязки, а начальным данным $\bar{y} \notin R_A + S_\delta(0)$ ставит в соответствие 0:

$$\tilde{P}\bar{y} = \begin{cases} \tilde{X} \colon & \bar{y} \in R_A + S_\delta(0). \\ 0 \colon & \bar{y} \in R_A + S_\delta(0). \end{cases}$$

Теорема 1. *Метод невязки оптимален по порядку на классе $\mathfrak{M}$, т. е.*

$$\Delta(\tilde{P}) \leqslant 2 \inf_{P \in P(Y,\, X)} \Delta(P).$$

Рассмотрим цепочки конечномерных подпространств пространства Z и Y,

$$Z_1 \subset Z_2 \subset \ldots \subset Z_n \subset \ldots \subset Z,$$

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \ldots \subset Y_m \subset \ldots \subset Y,$$

такие, что $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} Z_n} = Z$, $\overline{\bigcup_{m=1}^{\infty} Y_m} = Y$, и последовательность линейных ограниченных операторов $\{Q_m\}$ таких, что $Q_m Y = Y_m$ и для любого $y \in Y$ $Q_m y \to y$ при $m \to \infty$. Обозначим через $X_\delta{}^{nm}$ множество $x_\delta{}^{nm}$ таких, *что* $x_\delta{}^{nm} = Bz_\delta{}^{nm}$, а $\|z_\delta{}^{nm}\| = \inf\limits_{z \in Z_n,\ \|Q_m ABz - Q_m \bar{y}\| \leqslant \delta} \|z\|$.

Теорема 2. *Для любого $\bar{y}$ такого, что $\rho(\bar{y}, R_A) < \delta$, и для достаточно больших m и n $X_\delta{}^{nm} \neq \phi$.*

Множество $\overline{X} = \{\bar{x} \in X \colon \exists \{x_{n_k m_k}\},\ x_{n_k m_k} \in X_\delta^{n_k m_k},\ x_{n_k m_k} \to \bar{x}\}$ будем называть приближенным решением уравнения (1) при $y = \bar{y}$, полученным методом аппроксимативной невязки.

Через $\overline{P}$ обозначим отображение, которое начальным данным $\bar{y}$, $\rho(\bar{y}, R_A) < \delta$ ставит в соответствие приближенное решение $\overline{X}$ уравнения (1), полученное методом аппроксимативной невязки, а начальным данным $\bar{y}$: $\rho(\bar{y}, R_A) \geqslant \delta$ ставит в соответствие 0:

$$\overline{P}\bar{y} = \begin{cases} \overline{X} \colon & \rho(\bar{y}, R_A) < \delta, \\ 0 \colon & \rho(\bar{y}, R_A) \geqslant \delta. \end{cases}$$

Теорема 3. *Метод аппроксимативной невязки оптимален по порядку на классе $\mathfrak{M}$, т. е.*

$$\Delta(\overline{P}) \leqslant 2 \inf_{P \in P(Y,\, X)} \Delta(P).$$

Теорема 4. *Имеет место β-сходимость множеств $X_\delta{}^{nm}$ к $\overline{X}$ при $n, m \to \infty$, т. е.*

$$\sup_{x \in X_\delta^{nm}} \inf_{x' \in \overline{X}} \|x - x'\| \to 0 \quad \text{при} \quad n, m \to \infty.$$

Из теоремы 4 следует, что метод аппроксимативной невязки позволяет свести задачу приближенного решения операторного уравнения первого рода к конечномерной вариационной задаче. Для метода невязки подобный результат не имеет места.

Заметим, что если Z — рефлексивное строго выпуклое пространство, а A и B — линейные операторы, то методы невязки и аппроксимативной невязки совпадают.

3. Об оптимальности метода квазирешений В. К. Иванова при решении задач II типа. Метод квазирешений ([4]) решения задач II типа заключается в нахождении по $\bar{y}$ множества $\hat{X}\subset R_B$ такого, что $\hat{X}=B\hat{Z}$, где каждый элемент $\hat{z}\in\hat{Z}$ удовлетворяет условию

$$\|AB\hat{z}-\bar{y}\|=\inf_{\|z\|\leqslant M}\|ABz-\bar{y}\|.$$

Через $\hat{P}$ обозначим отображение, которое начальным данным $\bar{y}\in Y$ ставит в соответствие квазирешение $\hat{X}$.

Теорема 5. *Метод квазирешений оптимален по порядку на классе* $\mathfrak{M}$, *т. е.*

$$\Delta(\hat{P})\leqslant 2\inf_{P\in P(Y,\,X)}\Delta(P).$$

Уральский государственный университет
им. А. М. Горького
Свердловск

Поступило
30 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Н. Тихонов*, ДАН, т. 156, № 6, 1296 (1964). [2] *А. Н. Тихонов*, ДАН, т. 161, № 5, 1023 (1965). [3] *В. К. Иванов*, Журн. вычислит. матем. и матем. физ., т. 6, № 6, 1089 (1966). [4] *В. К. Иванов*, ДАН, т. 145, № 2, 270 (1962). [5] *D. L. Phillips*, J. Assoc. Comp. Machinery, v. 9, № 1, 84 (1962). [6] *И. Н. Домбровская, В. К. Иванов*, Сиб. матем. журн., т. 6, № 3, 499 (1965). [7] *М. М. Вайнберг*, Вариационные методы исследования нелинейных операторов, М., 1956.