Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 1

УДК 62.501.12 *КИБЕРНЕТИКА И ТЕОРИЯ РЕГУЛИРОВАНИЯ*

А. Г. БУТКОВСКИЙ

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ ФИНИТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 31 V 1974)

В теории линейных уравнений и, в частности, уравнений математической физики, существует важное понятие фундаментального решения ([1]). Фундаментальное решение — это решение уравнения, когда в качестве начальных условий и возмущающих членов взяты δ-функции. Зная фундаментальное решение, легко получить решение при произвольных начальных условиях и произвольных возмущающих функциях путем свертки.

В ([2]) было введено понятие финитного управления (ф.у.), т. е. такого управления, которое за фиксированное время переводит управляемую систему из данного произвольного начального состояния в нулевое состояние.

По аналогии с понятием фундаментального решения здесь вводится понятие *фундаментального финитного управления* (ф.ф.у.).

Ф.ф.у. будем называть такое финитное управление, которое за фиксированное время $T=t_1-t_0$ переводит управляемую систему из начального состояния в нулевое состояние, причем в качестве начального состояния берутся определенного вида δ-функции. Значение ф.ф.у. позволяет также легко, путем соответствующей операции свертки, получить финитное управление для произвольных начальных условий.

Перейдем к точным формулировкам. Рассмотрим системы с распределенными параметрами. Аналогичное рассмотрение для сосредоточенных непрерывных или дискретных систем значительно проще. Пусть состояние линейной управляемой системы в момент времени t, $t\geqslant t_0$, описывается функцией $Q(x, t)$, где аргумент x принадлежит некоторому пространственному отрезку $[x_0, x_1]$. Для простоты предположим, что управляющее воздействие $u(t)$ зависит только от t, а возмущениями являются только начальные условия. Обобщение понятия ф.ф.у. на случай, когда u зависит от x и когда состояние системы Q и управление u являются векторами, подчиненными векторным уравнениям, а также когда, кроме возмущений от начальных условий, имеются еще и другие внешние возмущения, действующие не только в начальный момент, но и в течение всего процесса управления $t_0\leqslant t\leqslant t_0+T=t_1$, не составляет труда.

Обозначим через $u_m^0(t, \xi)$, $m=0, 1, \ldots, n-1$; $t\in[t_0, t_1]$, $\xi\in[x_0, x_1]$ финитное управление, соответствующее начальным условиям вида

$$\frac{\partial^i Q}{\partial t^i}(x, t_0)=\delta_{im}\delta(x-\xi), \qquad i=0, 1, \ldots, n-1, \tag{1}$$

где $\delta_{im}=0$ при $i\neq m$ и $\delta_{im}=1$ при $i=m$ (символ Кронекера) и $\delta(x-\xi)$ — δ-функция. Тогда совокупность $\{u_m^0(t, \xi)\}$, которую можно упорядочить в вектор, назовем *фундаментальным финитным управлением* (или *вектором фундаментального финитного управления*)

$$u_f(t, \xi)=(u_0^0(t, \xi), \ldots, \overset{0}{u}_{n-1}(t, \xi)). \tag{2}$$

На основании принципа суперпозиции можно показать, что в случае произвольных начальных условий

$$\frac{\partial^i Q}{\partial t^i}(x, t_0) = Q_i(x) \tag{3}$$

соответствующее финитное управление будет иметь вид

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{x_1} Q_i(\xi) u_i^0(t, \xi)\, d\xi = Q^0(\xi) * u_f(t, \xi), \tag{4}$$

где $*$ означает соответствующую операцию свертки по ξ и $Q^0(x) = (Q_0(x), \ldots, Q_{n-1}(x))$ — вектор начальных условий.

Помимо введенного выше понятия ф.ф.у. полезно ввести также понятие частного фундаментального финитного управления (ч.ф.ф.у.), ибо часто проще искать финитное управление для начальных распределений в виде производных или интегралов от δ-функций. Частным фундаментальным финитным управлением m-го порядка и k_m-го ранга назовем финитное управление $u_m^{k_m}(t, \xi)$, соответствующее начальным условиям

$$\frac{\partial^i Q}{\partial t^i}(x, t_0) = \delta_m \delta^{(k_m)}(x-\xi), \qquad k_m = 0, \pm 1, \ldots, \tag{5}$$

где $\delta^{(k_m)}$ есть k_m-я производная от δ-функции, $k_m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ ($k_m < 0$ соответствует $|k_m|$-й первообразной от δ-функции). Также можно показать, что, зная совокупность ч.ф.ф.у. $\{u_m^{k_m}(t, \xi)\}$, $m = 0, 1, \ldots, n-1$, финитное управление, соответствующее произвольным начальным условиям (3), можно найти по формуле

$$u(t) = \sum_{i=0}^{n-1} \int_{x_0}^{x_1} Q_i^{(-k_i)}(\xi) u_i^{k_i}(t, \xi)\, d\xi. \tag{6}$$

Можно показать, что ч.ф.ф.у. одного и того же порядка m, но разных рангов, скажем, r и $r+s$, связаны между собой соотношением

$$u_m^{r+s}(t, \xi) = (-1)^s \frac{\partial^s u_m^r(t, \xi)}{\partial \xi^s}, \qquad r, s = 0, \pm 1, \ldots, \tag{7}$$

что дает возможность пересчитывать ч.ф.ф.у. одного ранга в ч.ф.ф.у. другого ранга, в частности нулевого ранга. Отрицательные s в (7) означают интегрирование $u_m^r(t, \xi)$ по ξ последовательно $|s|$ раз в пределах от x_0 до ξ. Более того, оказывается, что можно также установить четкую связь между ч.ф.ф.у. различных порядков, а, следовательно, между двумя произвольными ч.ф.ф.у. разных порядков и разных рангов. Пусть, например, управляемая система внутри $[x_0, x_1]$ описывается уравнением

$$\frac{\partial^n Q}{\partial t^n} + a_{n-1}(x) \frac{\partial^{n-1} Q}{\partial t^{n-1}} + \ldots + a_1(x) \frac{\partial Q}{\partial t} = L(x, t) Q, \tag{8}$$

где $L(x, t)$ — линейный (например, интегродифференциального типа) оператор с коэффициентами, зависящими от x и t, и ее состояние зависит от управления $u(t)$, входящего, например, в соответствующие граничные условия. Пусть далее, скажем, известно ч.ф.ф.у. $\overset{r}{u}_{n-1}(t, \xi)$. Как найти ч.ф.ф.у. более низкого порядка? Оказывается, что ч.ф.ф.у. $\overset{r}{u}_{n-k}(t, \xi)$, $k = 2, 3, \ldots, n$, можно вычислить по формуле

$$\overset{r}{u}_{n-k}(t, \xi) = \left[\frac{\partial^{k-1}}{\partial t^{k-1}} + a_{n-1}(\xi) \frac{\partial^{k-2}}{\partial t^{k-2}} + \ldots + a_{n-k+1}(\xi)\right] \overset{r}{u}_{n-1}(t, \xi). \tag{9}$$

Эта формула получается почти с очевидностью, если рассматривать преобразование Фурье (или Лапласа) уравнения (8) по времени t.

Аналогичную формулу, но более сложную, можно написать для пересчета ч.ф.ф.у. произвольного порядка (а не только высшего $(n-1)$-го) в ч.ф.ф.у. любого другого порядка. Таким образом, используя формулы (7) и (8) и зная одно ч.ф.ф.у. $u_m^{k_m}(t,\xi)$, легко найти любое другое ч.ф.ф.у. заданных порядка и ранга, а следовательно, по одному произвольному ч.ф.ф.у. можно построить ф.ф.у. (2) и по формуле (4) решить задачу финитного управления для начальных условий произвольного вида (3). Приведем пример. Найти ф.у. $u(t)$, $0\leqslant t\leqslant T$, для волнового уравнения

$$\ddot{Q}=Q'',\quad 0<x<\pi,\quad t>0, \tag{10}$$

с граничными условиями

$$Q(0,t)=u(t),\quad Q(\pi,t)=0,\quad t\geqslant 0, \tag{11}$$

и произвольными начальными условиями

$$Q(x,0)=Q_0(x),\quad \dot{Q}(x,0)=Q_1(x),\quad 0\leqslant x\leqslant\pi. \tag{12}$$

Найдем ч.ф.ф.у. $u_1^1(t,\xi)$, $0\leqslant t\leqslant T$, $0<\xi<\pi$, соответствующее начальным условиям

$$Q(x,0)=0,\quad \dot{Q}(x,0)=\delta'(x-\xi). \tag{13}$$

Используя метод характеристик (метод распространяющихся волн Даламбера), нетрудно найти, что минимальное T в этой системе равно 2π (для самого «неблагоприятного» ξ из $(0,\pi)$) и

$$u_1^1(t,\xi)={}^1/{}_2[\delta(t-\xi)+\delta(t+\xi-2\pi)],\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\quad 0<\xi<\pi. \tag{14}$$

По формуле (7) при $r=1$ и $s=-1$ $(m=1)$ получим

$$u_1^0(t,\xi)=-\frac{1}{2}\int\limits_0^\xi[\delta(t-\eta)+\delta(t+\eta-2\pi)]d\eta=$$

$$=\frac{1}{2}[1(t-\xi)-1(t+\xi-2\pi)],\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi,\ 0<\xi<\pi. \tag{15}$$

Теперь по формуле (9) найдем

$$u_0^0(t,\xi)=\frac{\partial}{\partial t}u_1^0(t,\xi)=\frac{1}{2}[\delta(t-\xi)-\delta(t+\xi-2\pi)]. \tag{16}$$

Таким образом, вектор ф.ф.у. имеет вид

$$u_f(t,\xi)=(u_0^0(t,\xi),u_1^0(t,\xi))=$$

$$=\left(\frac{\delta(t-\xi)-\delta(t+\xi-2\pi)}{2},\ \frac{1(t-\xi)-1(t+\xi-2\pi)}{2}\right). \tag{17}$$

Следовательно, окончательно финитное управление, соответствующее произвольным начальным условиям (12), в соответствии с (4), равно

$$u(t)=\sum_{i=0}^{1}\int\limits_0^\pi Q_i(\xi)u_i^0(t,\xi)d\xi=Q^0(\xi)*u_f(t,\xi)=\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi Q_0(\xi)[\delta(t-\xi)-$$

$$-\delta(t+\xi-2\pi)]d\xi+\frac{1}{2}\int\limits_0 Q(\xi)[1(t-\xi)-1(t+\xi-2\pi)]d\xi=$$

$$=\frac{1}{2}[Q_0(t)-Q_0(2\pi-t)]+\frac{1}{2}\int\limits_0^t[Q_1(\xi)-Q_1(2\pi-\xi)]d\xi,\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi. \tag{18}$$

В (18) считается, что $Q_0(x)\equiv Q_1(x)\equiv 0$ при $x\notin(0,\pi)$.

Пусть теперь $x \in \mathscr{D}$, где $\mathscr{D}$ — некоторая область p-мерного эвклидова пространства. Тогда под ч.ф.ф.у. m-го порядка и (векторного) ранга $k_m = (k_{m1}, \ldots, k_{mp})$ будем понимать ф.у., соответствующее начальным условиям вида

$$\frac{\partial^i Q}{\partial t^i}(x, 0) = \delta_{im} \delta^{(k_{m1})}(x_1 - \xi_1) \ldots \delta^{(k_{mp})}(x_p - \xi_p), \tag{19}$$

где $i, m = 0, 1, \ldots, n-1$; $k_{mj} = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $j = 1, 2, \ldots, p$. В формуле (6) интеграл нужно брать по $\mathscr{D}$, а $Q_i^{(-k_i)}(\xi)$ нужно понимать как частную производную (или частичный интеграл, если какое-то $k_{ij} > 0$) от $Q_i(\xi)$ порядка $(k_{i1}, k_{i2}, \ldots, k_{ip})$ соответственно по $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$.

Далее, формула пересчета (7) примет вид

$$u_m^{r+s}(t, \xi) = (-1)^{\bar{s}} \frac{\partial^{\bar{s}} u_m^r(t, \xi)}{\partial \xi_1^{s_1} \partial \xi_2^{s_2}, \ldots, \partial \xi_p^{s_p}}, \tag{20}$$

где $s = (s_1, s_2, \ldots, s_p)$, $\bar{s} = s_1 + \ldots + s_p$. В случае $s_j < 0$, $j = 1, \ldots, p$, интегрирование по ξ_j ведется по множеству $[0, \xi_j] \times \mathscr{D}$. Формула (9) в этом случае не изменится.

Понятие ф.ф.у. можно обобщить на универсальный случай, соответствующий стандартной форме задачи ф.у., когда возмущающее воздействие $f(x, t)$ и управляющее воздействие $w(x, t)$ входят в основное дифференциальное уравнение, например (8), в правую его часть, в виде $f(x, t) + w(x, t)$ при нулевых начальных условиях и однородных (нулевых) граничных условиях. Тогда ф.ф.у. $w_f(x, t, \xi, \tau)$ назовем ф.у., гасящее «гриновское» возмущение $f(x, t) = \delta(x - \xi)\delta(t - \tau)$. При этом ф.у. $w(x, t)$, осуществляющее гашение произвольного возмущения $f(x, t)$, естественно, также финитного во времени t, выразится формулой

$$w(x, t) = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_0}^{x_1} f(\xi, \tau) w_f(x, t, \xi, \tau) \, d\xi \, d\tau. \tag{21}$$

Для рассмотренного выше примера, волнового уравнения (10) следует положить $f(x, t) = Q_0(x)\delta'(t) + Q_1(x)\delta(t)$ и $w(x, t) = u(t)\delta'(x)$. В частности, отсюда также следует, что определенное выше ч.ф.ф.у. $u_{n-1}^r(t, \xi)$ соответствует возмущению $f(x, t) = \delta^{(r)}(x - \xi)\delta(t - t_0)$ при нулевых начальных условиях.

Институт проблем управления
Москва

Поступило
25 IV 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *А. Н. Тихонов, А. А. Самарский*, Уравнения математической физики, «Наука», 1953. [2] *А. Г. Бутковский*, ДАН, т. 180, № 5 (1968); т. 188, № 3 (1969); т. 188, № 4 (1969); т. 191, № 6 (1970).