Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 1

УДК 531.8 ***МЕХАНИКА***

А. Ф. ВЕРЕЩАГИН

ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ПРИНУЖДЕНИЯ ГАУССА ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НА ЦВМ ДИНАМИКИ РОБОТОВ-МАНИПУЛЯТОРОВ

(Представлено академиком Б. Н. Петровым 17 VI 1974)

Проектирование роботов-манипуляторов требует изучения в качестве объектов управления ряда сложных многозвенных механических систем, таких как механическая рука, механическая модель человека и т. п. Моделирование на ЦВМ динамического поведения таких систем является мощным средством выявления рациональной кинематической схемы механизма и эффективных алгоритмов управления.

В настоящей работе предлагается метод моделирования на ЦВМ динамики сложных управляемых механизмов без вывода уравнений движения на основе прямой реализации принципа наименьшего принуждения Гаусса.

Механизм (исполнительный орган робота-манипулятора) рассматривается как совокупность твердых тел (звеньев) и управляющих двигателей, каким-либо образом соединенных между собой. Способ соединения определяется уравнениями связей. Скорость каждого звена можно задать 6-мерным вектором

$$\dot{\mathbf{x}}_i^{\mathrm{T}}=\{\omega_{1i},\ \omega_{2i},\ \omega_{3i},\ v_{1i},\ v_{2i},\ v_{3i}\},\quad i=1,\ 2,\ldots,\ n,$$

где i — номер звена, n — число звеньев в механизме, $\mathbf{v}_i^{\mathrm{T}}=\{v_{1i},\ v_{2i},\ v_{3i}\}$ — скорость центра масс, а $\boldsymbol{\omega}_i^{\mathrm{T}}=\{\omega_{1i},\ \omega_{2i},\ \omega_{3i}\}$ — мгновенная угловая скорость i-го звена; т — знак транспонирования.

Обозначим через q_j угол поворота вала j-го управляющего двигателя, $j=1,2,\ldots,p$.

Возможные скорости элементов рассматриваемой системы при заданной конфигурации удовлетворяют уравнениям связей

$$\mathbf{A}\dot{\mathbf{x}}+\mathbf{B}\dot{\mathbf{q}}=\mathbf{C},\tag{1}$$

где $\dot{\mathbf{x}}^{\mathrm{T}}=\{\dot{\mathbf{x}}_1^{\mathrm{T}},\ldots,\dot{\mathbf{x}}_n^{\mathrm{T}}\}$, $\dot{\mathbf{q}}^{\mathrm{T}}=\{\dot{\mathbf{q}}_1,\ldots,\dot{\mathbf{q}}_p\}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ — матрицы, зависящие от координат положения и времени, размеров $r\times 6n$, $r\times p$, $r\times 1$ соответственно, r — число уравнений связей.

Активные силы, действующие на механизм с идеальными связями, разделим на два класса: внешние силы, характеризуемые главными векторами сил $\mathbf{F}_i^{\mathrm{T}}=\{F_{1i},\ F_{2i},\ F_{3i}\}$ и главными моментами $\mathbf{M}_i^{\mathrm{T}}=\{M_{1i},\ M_{2i},\ M_{3i}\}$, действующими на звенья $i=1,2,\ldots,n$, и управляющие моменты двигателей Q_j $j=1,2,\ldots,p$.

Векторы $\mathbf{v}_i$, $\mathbf{F}_i$ удобно задавать в неподвижной системе координат, а ω_i, $\mathbf{M}_i$ в подвижной с осями, совпадающими с главными центральными осями инерции i-го звена.

Введем следующие обозначения:

$$\mathbf{W}_i=\mathrm{diag}\ \{a_i,\ b_i,\ c_i,\ m_i,\ m_i,\ m_i\},\quad \mathbf{W}=\mathrm{diag}\ \{\mathbf{W}_1,\ldots,\ \mathbf{W}_n\},$$

$$\ddot{\mathbf{z}}_i^{\mathrm{T}}=\left\{\frac{(b_i-c_i)\,\omega_{2i}\omega_{3i}+M_{1i}}{a_i},\ \frac{(c_i-a_i)\,\omega_{3i}\omega_{1i}+M_{2i}}{b_i}\ \ \frac{(a_i-b_i)\,\omega_{1i}\omega_{2i}+M_{3i}}{c_i},\right.$$

$$\left.\frac{F_{1i}}{m_i}, \frac{F_{2i}}{m_i}, \frac{F_{3i}}{m_i}\right\},$$

$$\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}=\{Q_1, \ldots, Q_p\}, \quad \ddot{\mathbf{z}}^{\mathrm{T}}=\{\ddot{\mathbf{z}}_1^{\mathrm{T}}, \ldots, \ddot{\mathbf{z}}_n^{\mathrm{T}}\},$$

где m_i — масса, a_i, b_i, c_i — главные центральные моменты инерции i-го звена; $\mathbf{W}_i$, $\mathbf{W}$ — диагональные матрицы размеров 6×6 и $6n\times6n$ соответственно.

Пусть заданы положение и скорость системы в момент времени t; заданы также силы и моменты $\mathbf{F}_i$, $\mathbf{M}_i$, $i=1, 2, \ldots, n$; Q_j, $j=1, 2, \ldots, p$.

Напишем выражение

$$I={}^1/_2(\ddot{\mathbf{x}}-\ddot{\mathbf{z}})^{\mathrm{T}}\mathbf{W}(\ddot{\mathbf{x}}-\ddot{\mathbf{z}})-\mathbf{Q}^{\mathrm{T}}\ddot{\mathbf{q}} \tag{2}$$

и будем рассматривать те значения ускорений $\ddot{\mathbf{x}}$, $\ddot{\mathbf{q}}$, которые возможны при заданной конфигурации и скорости.

Возможные ускорения системы удовлетворяют уравнениям

$$\mathbf{A}\ddot{\mathbf{x}}+\mathbf{B}\ddot{\mathbf{q}}=\mathbf{D}, \quad \text{где} \quad \mathbf{D}=\dot{\mathbf{C}}-\dot{\mathbf{A}}\dot{\mathbf{x}}-\dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{q}}. \tag{3}$$

Принцип наименьшего принуждения Гаусса ([1]) для нашей механической системы можно сформулировать следующим образом. В классе всех возможных ускорений истинные ускорения обеспечивают единственный минимум выражению (2). Действительно, это выражение отличается от стандартного выражения меры принуждения в принципе Гаусса на величину, которая от ускорений не зависит.

При интегрировании уравнений движения на ЦВМ численными методами необходимо на каждом шаге интегрирования один или несколько раз в зависимости от метода интегрирования вычислять ускорения при заданных координатах и скоростях. В принципе Гаусса определение ускорений сводится к простой алгебраической задаче о минимизации квадратичной формы (2) при линейных ограничениях (3).

Если инерция ротора j-го двигателя, закрепленного на i-м звене, оказывает существенное влияние на динамику механизма, то к выражению (2) следует прибавить слагаемое

$$^1/_2d_j(\dot{\boldsymbol{\omega}}_i+\boldsymbol{\varepsilon}_j\ddot{q}_j+\dot{q}_j(\boldsymbol{\omega}_i\times\boldsymbol{\varepsilon}_j))^2-{}^1/_2d_j(\dot{\boldsymbol{\omega}}_i)^2,$$

где d_j — момент инерции ротора относительно оси вращения, а $\boldsymbol{\varepsilon}_j$ — единичный вектор этой оси в связанной системе координат; при этом a_i, b_i, c_i, m_i вычисляются при закрепленном в этом звене роторе двигателя.

Таким образом, для моделирования управляемого движения конкретного механизма необходимо в общую программу моделирования, работающую по указанному выше методу, включить две нестандартные процедуры: первая процедура вырабатывает по заданным конфигурации и скорости системы матрицы $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ ограничений (3), а вторая процедура вычисляет управляющие моменты $\mathbf{Q}$ в соответствии с конкретным алгоритмом управления.

Для рассмотренной задачи минимизации можно написать аналитическое решение, однако при применении ЦВМ из-за возможно больших размеров участвующих матриц целесообразны итерационные методы ([2]).

Часто исполнительные органы манипуляторов представляют собой пространственные механизмы, содержащие ряд звеньев, соединенных в цепь с одной степенью подвижности между звеньями. Для таких механизмов уравнения связей (3) можно записать в рекуррентном виде

$$\ddot{\mathbf{x}}_i=\mathbf{A}_i\ddot{\mathbf{x}}_{i-1}+\mathbf{B}_i\ddot{q}_i+\mathbf{f}_i, \quad i=1, 2, \ldots, n, \tag{4}$$

где q_i — угол поворота вала двигателя, обеспечивающего перемещение i-го звена относительно $(i-1)$-го; $\mathbf{A}_i$, $\mathbf{B}_i$, f_i — матрицы, зависящие от положения и скорости системы, размеров 6×6, 6×1 и 6×1 соответственно. Вектор $\ddot{x}_0$, как правило, задан.

Минимизируемую функцию (2) целесообразно представить в аддитивной форме

$$I=\sum_{i=1}^{n} {}^1/_2(\ddot{\mathbf{x}}_i-\ddot{\mathbf{z}}_i)^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_i(\ddot{\mathbf{x}}_i-\ddot{\mathbf{z}}_i)-Q_i\ddot{q}_i. \tag{5}$$

В итоге для определения $\ddot{q}_1, \ldots, \ddot{q}_n$ имеем многошаговую задачу динамического программирования ([3]), решение которой можно записать, например, с помощью рекуррентных соотношений

$$\begin{gathered}
\ddot{q}_i=(Q_i-((\ddot{\mathbf{x}}_{i-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{A}_i^{\mathrm{T}}+\mathbf{f}_i^{\mathrm{T}})\mathbf{P}_i+\mathbf{R}_i^{\mathrm{T}})\mathbf{B}_i)(\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_i\mathbf{B}_i)^{-1},\\
\mathbf{P}_{i-1}=\mathbf{W}_{i-1}+\mathbf{A}_i^{\mathrm{T}}(\mathbf{P}_i-\mathbf{P}_i\mathbf{B}_i(\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_i\mathbf{B}_i)^{-1}\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_i)\mathbf{A}_i,\\
\mathbf{R}_{i-1}^{\mathrm{T}}=-\ddot{\mathbf{z}}_{i-1}^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_{i-1}-(\mathbf{R}_i^{\mathrm{T}}+\mathbf{f}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_i)\mathbf{A}_i+(Q_i-(\mathbf{R}_i^{\mathrm{T}}+\mathbf{f}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_i)\mathbf{B}_i)(\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_i\mathbf{B}_i)^{-1}\mathbf{B}_i^{\mathrm{T}}\mathbf{P}_i\mathbf{A}_i,
\end{gathered} \tag{6}$$

где $\mathbf{P}_i$ — симметрическая матрица (6×6), $\mathbf{R}_i$ — вектор (6×1). Для разомкнутого механизма, когда нет дополнительных ограничений, наложенных на последнее звено, $\mathbf{P}_{n+1}=\mathbf{0}$, $\mathbf{R}_{n+1}=\mathbf{0}$.

Соотношения (6) позволили построить эффективную программу моделирования на ЦВМ динамического поведения механической руки манипулятора в процессе управления.

Программа используется для исследования и проверки функционирования разрабатываемых алгоритмов управления роботом-манипулятором.

Научно-исследовательский институт
проблем машиноведения
Московского высшего технического училища
им. Н. Э. Баумана

Поступило
29 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Л. Парс*, Аналитическая динамика, «Наука», 1971. [2] *Н. С. Бахвалов,* Численные методы, т. 1, «Наука», 1973. [3] *Р. Беллман,* Динамическое программирование, ИЛ, 1960.