Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 1

УДК 519.1 МАТЕМАТИКА

Ю. М. ВОЛОШИН

ВЗВЕШЕННЫЕ ПРЕДМЕТНЫЕ ОБЛАСТИ И ЗАДАЧИ ПЕРЕЧИСЛЕНИЯ ТЕРМОВ В ЭТИХ ОБЛАСТЯХ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 29 IV 1974)

1. Под взвешенной предметной областью (в.п.о.) $\mathbf{D}$ спецификации

$$(h_{01}\cdot c_{01}{}^{0}\ldots h_{0s_0}\cdot c_{0s_0}^{0} h_{11}\cdot c_{11}{}^{m_1}\ldots h_{1s_1}\cdot c_{1s_1}^{m_1}\ldots h_{n1}\cdot c_{n1}{}^{m_n}\ldots h_{ns_n}\cdot c_{ns_n}^{m_n}) \qquad (1)$$

понимается совокупность термов, которые строятся из $c_{0j}\neq 0$ переменных целого веса $h_{0j}\geqslant 0$, $j=1,2,\ldots,s_0$, и $c_{ij}\neq 0$ функциональных m_i-местных знаков целого веса $h_{ij}\geqslant 0$, $i=1,2,\ldots,n$; $j=1,2,\ldots,s_i$, с помощью композиций. Терм и его вес индуктивно определяются следующими правилами: 1) переменная a веса w есть терм a веса w; 2) если $a_1,a_2,\ldots,a_i$ — переменные весов $w_1,w_2,\ldots,w_i$ соответственно и $f^{(i)}$ — i-местный функциональный знак веса w, то $f^{(i)}(a_1,a_2,\ldots,a_i)$ — терм веса $w+w_1+\ldots+w_i$; 3) никаких других термов не существует.

В работе находятся выражения для количества термов в в.п.о. с данным весом, обобщающие результаты работы [1]. Решаются также задачи перечисления термов в в.п.о. по некоторым характеристикам, связанным с понятием веса, и, наконец, рассматриваются некоторые вопросы кодировки термов одной предметной области термами другой предметной области.

2. Обозначим через $w_k(\mathbf{D})$ количество термов веса $k\geqslant 0$ в в.п.о. спецификации (1) и через $W(\mathbf{D};t)$ — соответствующую производящую функцию

$$W(\mathbf{D};t)=\sum_{k=0}^{\infty} w_k(\mathbf{D})t^k.$$

Производящая функция $W(\mathbf{D};t)$ удовлетворяет уравнению

$$W(\mathbf{D};t)=\sum_{j=1}^{s_0} c_{0j}t^{h_{0j}}+\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{s_i} c_{ij}t^{h_{ij}}\right)(W(\mathbf{D};t))^{m_i}. \qquad (2)$$

Это уравнение алгебраическое степени $m=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{m_i\}$, его решение может быть найдено по формуле Лагранжа [2] и имеет вид

$$W(\mathbf{D};t)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{k_1+\ldots+k_n=k}(m_1k_1+\ldots+m_nk_n)!\times$$
$$\times\prod_{i=0}^{n}\sum_{k_{i1}+\ldots+k_{is_i}=k_i}\frac{c_{i1}^{k_{i1}}\ldots c_{is_i}^{k_{is_i}}}{k_{i1}!\ldots k_{is_i}!}t^{k_{i1}h_{i1}+\ldots+k_{is_i}h_{is_i}},$$

где $k_i\geqslant 0$, $k_{ij}\geqslant 0$, $k_0=(m_1-1)k_1+\ldots+(m_n-1)k_n$.

Теорема 1. *Для количества термов веса k в в.п.о. спецификации* (1) *имеет место выражение*

$$w_k(\mathbf{D})=\sum(m_1k_1+\ldots+m_nk_n)!\prod_{i=0}^{n}\frac{c_{i1}^{k_{i1}}\ldots c_{is_i}^{k_{is_i}}}{k_{i1}!\ldots k_{is_i}!}, \qquad (3)$$

в котором суммирование ведется по всем системам целых неотрицательных чисел $\{k_{ij}\}$, $i=1,2,\ldots,n$, $j=1,2,\ldots,s_i$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=1}^{s_i} k_{ij}h_{ij}=k,$$

где

$$k_0=(m_1-1)k_1+\ldots+(m_n-1)k_n, \qquad k_i=\sum_{j=1}^{s_i} k_{ij}, \quad i=1,2,\ldots,n.$$

Формула (3) включает как частные случаи явные выражения для количества термов данной длины, валентности и сложности, полученные в работе [1]. Полагая в (3) $h_{ij}=1$, получим выражение для числа термов длины k, поскольку длина терма определяется как суммарное количество вхождений переменных и функциональных знаков; при $h_{0j}=1$ и $h_{ij}=0$, $i>0$, получим выражение для количества термов с числом вхождений переменных, равным k (валентность), и, наконец, при $h_{0j}=0$ и $h_{ij}=1$, $i>0$, получим выражение для количества термов с числом вхождений функциональных знаков, равным k (сложность).

В работе [1] изучались предметные области, в которых термы строились с использованием только конечного числа переменных. Введение веса позволяет решать задачи перечисления термов и для предметных областей с бесконечным количеством как переменных, так и функциональных знаков. В уравнении (2) n и s_i могут принимать бесконечные значения и, следовательно, соответствующие многочлены превратятся в степенные ряды. В этих случаях для конечности значения $w_k(\mathbf{D})$ при конечном значении k необходимо выполнение некоторых условий, в частности следующего: если $m_i=1$ при некотором i, то $h_{ij}\neq 0$ для $j=1,2,\ldots,s_i$.

Ниже приводятся два примера в.п.о., имеющих самостоятельное значение. В качестве первого примера в.п.о. с бесконечной спецификацией рассмотрим в.п.о. $\mathbf{U}$ со спецификацией

$$(1\cdot 1^0\, 2\cdot 1^0\, 3\cdot 1^0 \ldots 1\cdot 1^1\, 2\cdot 1^1\, 3\cdot 1^1 \ldots 1\cdot 1^i\, 2\cdot 1^i\, 3\cdot 1^i \ldots).$$

Эту в.п.о. естественно называть универсальной, поскольку термы ее строятся из бесконечного числа переменных всех положительных весов и бесконечного числа функциональных знаков всех местностей всех положительных весов. Для соответствующей производящей функции $W(\mathbf{U};t)$ уравнение (2) принимает вид

$$W(\mathbf{U};t)=\frac{t}{1-t}\,\frac{1}{1-W(\mathbf{U};t)}.$$

Отсюда следует, что

$$w_k(\mathbf{U})=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\binom{2i-2}{i-1}\binom{k-1}{i-1}, \quad k=1,2,\ldots \tag{4}$$

В качестве второго примера в.п.о. с бесконечным числом переменных рассмотрим в.п.о. $\mathbf{D}_1$ со спецификацией

$$(1\cdot 1^0\, 2\cdot 1^0\, 3\cdot 1^0 \ldots i\cdot 1^0 \ldots 0\cdot 1^2),$$

термы которой строятся из переменных с весами 1, 2, 3, … и одного 2-местного функционального знака веса 0. Уравнение для производящей функции $W(\mathbf{D}_1;t)$ имеет в этом случае вид

$$W(\mathbf{D}_1;t)=\frac{t}{1-t}+(W(\mathbf{D}_1;t))^2,$$

откуда

$$w_k(\mathbf{D}_1)=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\binom{2i-2}{i-1}\binom{k-1}{i-1}, \quad k=1,2,\ldots \tag{5}$$

Теорема 2. *Между в.п.о.* $\mathbf{U}$ *и* $\mathbf{D}_1$ *существует взаимно однозначное соответствие.*

Эта теорема обобщает на в.п.о. известный факт (1—1) соответствия (на языке деревьев) между классом упорядоченных деревьев и классом двоичных деревьев ([4]).

3. Глубиной вложенности данного вхождения терма a как подтерма в терм b называется число термов, содержащих данное вхождение. Можно говорить о глубине вложенности соответствующей переменной или функционального знака. Максимальная из глубин вложенности всех вхождений переменных данного терма называется глубиной этого терма. Обозначим через $f_h(k)$ количество термов в.п.о. спецификации (1) веса k с глубиной, меньшей либо равной h, $h \geqslant 0$. Для соответствующей производящей функции

$$F_h(\mathbf{D};\ t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_h(k)\, t^k$$

имеет место рекуррентное соотношение

$$F_0(\mathbf{D};\ t) = \sum_{j=1}^{s_0} c_{0j} t^{h_{0j}},$$

$$F_{h+1}(\mathbf{D};\ t) = \sum_{j=1}^{s_0} c_{0j} t^{h_{0j}} + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{s_i} c_{ij} t^{h_{ij}} \right) (F_h(\mathbf{D};\ t))^{m_i}.$$

Потенциалом терма в в.п.о. назовем сумму по всем вхождениям всех знаков (переменных и функциональных) произведений глубин вложенности знаков на их веса. Для функциональных деревьев ([1]) будем называть потенциалом сумму произведений веса вершины на ее расстояние до корня дерева, взятую по всем вершинам дерева. Обозначим через p_{kl} количество термов веса k и потенциала l по в.п.о. спецификации (1).

Для производящей функции

$$P(\mathbf{D};\ x, y) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} p_{kl} x^k y^l$$

справедливо уравнение

$$P(\mathbf{D};\ x, y) = \sum_{j=1}^{s_0} c_{0j} x^{h_{0j}} + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{s_i} c_{ij} x^{h_{ij}} \right) (P(\mathbf{D};\ xy, y))^{m_i}.$$

Для универсальной предметной области $\mathbf{U}$ в соответствии с последним уравнением для $P(\mathbf{U};\ x, y)$ имеет место уравнение

$$P(\mathbf{U};\ x, y) = \frac{x}{1-x} \frac{1}{1 - P(\mathbf{U};\ xy, y)}. \qquad (6)$$

Отсюда получаем представление $P(\mathbf{U};\ x, y)$ в виде цепной дроби

$$P(\mathbf{U}; x, y) = \cfrac{\cfrac{x}{1-x}}{1 - \cfrac{\cfrac{xy}{1-xy}}{1 - \cfrac{\cfrac{xy^2}{1-xy^2}}{1 - \dots}}}$$

Из последнего представления для $P(\mathbf{U};\ x, y)$ получается выражение через базисные гипергеометрические функции ([3])

$$P(\mathbf{U};\ x, y)=\frac{x}{1-x}\,\frac{{}_2\Phi_0((1+\sqrt{5})/2,\ (1-\sqrt{5})/2;\ ;\ y, xy^2)}{{}_2\Phi_0((1+\sqrt{5})/2,\ (1-\sqrt{5})/2;\ ;\ y, xy)},$$

где

$${}_2\Phi_0(\alpha;\ \beta;\ ;\ q, z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha, q)_n(\beta;\ q)_n}{(q;\ q)_n}z^n,$$

$$(a;\ q)_0=1$$

$$(a;\ q)_n=(1-a)(1-aq)\ldots(1-aq^{n-1}).$$

Обозначим через $aw(\mathbf{U};\ k)$ среднее значение потенциала термов веса k из универсальной предметной области $\mathbf{U}$. Для производящей функции

$$AW(\mathbf{U};\ x)=\left.\frac{\partial P(\mathbf{U};\ x, y)}{\partial y}\right|_{y=1}=\sum_{k=1}^{\infty}aw_k(\mathbf{U})x^k,$$

с коэффициентами которой $aw_k(\mathbf{U})$ величины $aw(\mathbf{U};\ k)$ связаны соотношением $aw_k(\mathbf{U})=aw(\mathbf{U};\ k)\cdot w_k(\mathbf{U})$, из уравнения (6) следует равенство

$$AW(\mathbf{U};\ x)=\frac{x}{(1-x)(1-5x)}P(\mathbf{U};\ x, 1). \tag{7}$$

Отсюда вытекает равенство

$$aw(\mathbf{U};\ k)=\sum_{i=1}^{k-1}\frac{5^{k-i}-1}{4}\sum_{j=1}^{i}\frac{1}{j}\binom{2j-2}{j-1}\binom{i-1}{j-1}\Bigg/\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i}\binom{2i-2}{i-1}\binom{k-1}{i-1}\approx$$

$$\approx\sqrt{\frac{\pi}{5}}\,k\sqrt{k}.$$

Для в.п.о. $\mathbf{D}_1$ (см. пример 2) производящая функция $P(\mathbf{D}_1;\ x, y)$, перечисляющая термы по потенциалу и весу, удовлетворяет уравнению

$$P(\mathbf{D}_1;\ x, y)=\frac{x}{1-x}+(P(\mathbf{D}_1;\ xy, y))^2.$$

Из этого уравнения для производящей функции $AW(\mathbf{D}_1;\ x)$ следует выражение

$$AW(\mathbf{D}_1;\ x)=\frac{2x}{(1-x)(1-5x)}P(\mathbf{D}_1;\ x, 1). \tag{8}$$

Поскольку $P(\mathbf{U};\ x, 1)=P(\mathbf{D};\ x, 1)$, то сравнение соотношений (7) и (8) приводит к следующей теореме.

Теорема 3. *При наличии* (1—1) *соответствия термов веса k в в.п.о. $\mathbf{U}$ и $\mathbf{D}_1$ среднее значение потенциала таких термов из универсальной предметной области в 2 раза меньше среднего значения потенциала соответствующих термов из в.п.о. $\mathbf{D}_1$, функциональные деревья которой являются взвешенными двоичными деревьями.*

Этот факт можно интерпретировать как меру «нотационных» затрат при кодировке термов из универсальной предметной области термами из $\mathbf{D}_1$, содержащими только один двухместный функциональный знак.

Вычислительный центр
Академии наук СССР
Москва

Поступило
13 V 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *Yu. M. Voloshin*, J. Combinatorial Theory, v. A12, № 2, 202 (1972). [2] *Э. Т. Уиттекер, Дж. Н. Ватсон*, Курс современного анализа, т. 1, М., 1963. [3] *L. T. Slater*, Generalized Hypergeometric Functions, Cambridge, 1966. [4] *F. Harary, G. Prins, W. T. Tutte*, Indag. Math., v. 26, № 3, 329 (1964).