Доклады Академии наук СССР
1975. Том 220, № 1

УДК 519.4:517:513.88 МАТЕМАТИКА

В. Я. ГОЛОДЕЦ

АСИМПТОТИЧЕСКАЯ АЛГЕБРА, ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ К ИЗУЧЕНИЮ МОДУЛЯРНЫХ ОПЕРАТОРОВ И ИХ СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВ

(Представлено академиком Л. В. Канторовичем 10 VII 1974)

1. В настоящей заметке для неймановской алгебры M с точным нормальным (т.н.) состоянием ρ и модулярным оператором (м.о.) $\Delta\rho$ (см. [2])) каноническим способом строится неймановская алгебра $C_M{}^U$ с т.н. состоянием $\bar{\rho}$ и м.о. $\Delta_{\bar{\rho}}$, сконцентрировавшая в себе асимптотические свойства алгебры M. Мы покажем, что $C_M{}^U$, которую естественно называть асимптотической алгеброй для M, является алгебраическим инвариантом M, и укажем ее свойства, а также свойства м.о. $\Delta_{\bar{\rho}}$. Отметим, например, что точки спектра $\Delta_{\bar{\rho}}$ составляют группу по умножению; $\mathrm{Spec}\,\Delta_{\bar{\rho}}\subseteq S(M)$, где $S(M)=\bigcap_{\mu\in I}\mathrm{Spec}\,\Delta_\mu$, а I — множество всех т.н. состояний μ на M. Более того, если λ является собственным значением $\Delta_{\bar{\rho}}$, то λ принадлежит множеству асимптотических отношений $A(M)$ алгебры M ([3]). Этот факт, в частности, позволяет указать способ вычисления множества $A(M)$ с помощью м.о., пригодный для любого фактора M.

Известно ([8], [9]), что м.о. порождает группу «временной эволюции» представления алгебры квазилокальных наблюдаемых, построенного по предельному состоянию Гиббса согласно конструкции ГНС *. Мы применим нашу теорию к изучению спектральных свойств м.о. в этой ситуации.

2. Пусть M — фактор в сепарабельном гильбертовом пространстве H с т.н. состоянием ρ вида $\rho(x)=(x\xi,\xi)$, где $x\in M$, а ξ — циклический отделяющий вектор для M в H. Через Δ_ρ обозначим м.о. фактора M, отвечающий ρ, а через — $\sigma_t{}^\rho$, $-\infty<t<\infty$, — соответствующую группу модулярных автоморфизмов (г.м.а.) фактора M ([2]).

Пусть $\overline{M}$ — C^*-алгебра, элементами которой являются всевозможные ограниченные последовательности $\bar{x}=(x_n)$, где $x_n\in M$, а $\overline{M}_d$ — C^*-подалгебра $\overline{M}$, содержащая все последовательности вида $\bar{x}=(x_n)$, где $x_1=x_2=\ldots$ Аналогично определим $\overline{M}'$ и $\overline{M}_d{}'$. Зададим позитивный ограниченный функционал $\bar{\rho}$ на $\overline{M}$, положив

$$\bar{\rho}(\bar{x})=\lim_{n\in U}\rho(x_n),\qquad \bar{x}=(x_n)\in\overline{M}, \tag{2,1}$$

где U — свободный ультрафильтр (см. ([10]), стр. 42) на множестве натуральных чисел $\mathbf{N}$. Ясно, что $\bar{\rho}$ — позитивный функционал на M, $|\rho(\bar{x})|=\|\bar{x}\|$, где $\|\bar{x}\|=\sup\limits_n\|x_n\|$. Поэтому с помощью $\bar{\rho}$ согласно конструкции ГНС можно построить представление Π алгебры $\overline{M}$ в гильбертовом пространстве $\overline{H}$, причем $\bar{\rho}(x)=\langle\Pi(\bar{x})\bar{\xi},\bar{\xi}\rangle$, где $\langle\cdot,\cdot\rangle$ — скалярное произведение в $\overline{H}$, а $\bar{\xi}$ — единичный вектор из $\overline{H}$, циклический для $\Pi(M)$, т. е. $[\Pi(\overline{M})\bar{\xi}]=\overline{H}$

Лемма 2.1. *Для всякого $A\in\Pi(\overline{M})''$ существует последовательность $\bar{z}=(z_n)\in\overline{M}$ такая, что $A^\#\bar{\xi}=\Pi(\bar{z})^\#\bar{\xi}$ (символ $\#$ здесь и в дальнейшем означает наличие или отсутствие знака сопряжения $*$).*

---

* ГНС – Гельфанд, Наймарк, Сигал.

Действительно, согласно теореме Капланского о плотности, существует последовательность $\bar{x}^n \in \bar{M}$ такая, что

(I) $\sup\limits_n \|\Pi(\bar{x}^n)\| < \infty$;

(II) $\lim\limits_{n\to\infty} \langle\!\langle (A - \Pi(\bar{x}^n)^{*}\xi \rangle\!\rangle = 0$.

Пусть $\bar{x}^n = (x_k^n) \in \bar{M}$. Поскольку $\|\Pi(\bar{x}^n)\| = \inf\limits_{\bar{a}\in I} \|\bar{x} + \bar{a}\|$, где I — ядро Π, то x_k^n можно подобрать так, чтобы $\sup\limits_{n,k} \|x_k^n\|$. Используя свойства U, можно доказать существование в $(x_k^n)_{n,k\in\mathrm{N}}$ подпоследовательности $\bar{z} = (z_n)$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} \langle\!\langle (\Pi(\bar{z}) - \Pi(\bar{x}^n))^{*}\xi \rangle\!\rangle \neq 0$.

Обозначим через E проектор на $[\Pi(\bar{M})'\xi]$, а через R — неймановскую алгебру в пространстве $\tilde{H} = EH$, порожденную операторами EAE, где $A, E \in \Pi(\bar{M})''$.

Лемма 2.2. *Пусть $\bar{N}$ — подмножество всех $\bar{x} \in \bar{M}$, для которых $\Pi(\bar{x})^{*}E \in R$. Тогда $\bar{N}$ — C^*-подалгебра $\bar{M}$ и $\Pi(\bar{N})E = R$. Кроме того*

$$I = \{\bar{x} = (x_n) \in \bar{N}:\ \lim_{n\in U} \rho(x_n^* x_n) = 0\},$$

I — двусторонний идеал $\bar{N}$ и $\bar{N}/I = R$.

Ясно, что вектор ξ является циклическим отделяющим для R в $\tilde{H}$. Поэтому по ξ можно построить м.о. $\bar{\Delta}_{\bar{\rho}}$ для R и г.м.а. $\bar{\sigma}_t^\rho$, $-\infty < t < \infty$: $\bar{\sigma}_t^\rho(\Pi(\bar{x})) = \bar{\Delta}_{\bar{\rho}}^{it}\Pi(\bar{x})\bar{\Delta}_\rho^{-it}$ [2].

Лемма 2.3. *Г.м.а. σ_t^ρ, $-\infty < t < \infty$, алгебры $R = \bar{N}/I$ индуцируется г.м.а. σ_t^ρ, $-\infty < t < \infty$, алгебры M, причем*

$$\bar{\sigma}_t^{\bar{\rho}}(\Pi(\bar{x})) = \Pi(\sigma_t(\bar{x})), \quad -\infty < t < \infty, \tag{2,2}$$

где $\bar{x} \in \bar{N}$, $\sigma_t(\bar{x}) = (\sigma_t^\rho(x_n))$.

3. Определим асимптотическую алгебру C_M^U и опишем ее свойства. Докажем сначала, что $\bar{M}_d \subset \bar{N}$. Заметим, что элементу $\bar{b}' = (b_n')$ из $\bar{M}_+'$ можно поставить в соответствие ограниченный позитивный функционал $\bar{\rho}_{\bar{b}'}(\bar{x}) = \lim\limits_{n\in U} \rho(b_n' x_n)$, где $\bar{x} = (x_n) \in \bar{M}$, на $\bar{M}$. Так как $|\bar{\rho}_{\bar{b}'}(\bar{x}^*\bar{x})| < \|\bar{b}'\|\bar{\rho}(\bar{x}^*\bar{x})$, где $\bar{x} \in \bar{M}$, $\|\bar{b}'\| = \sup\limits_n \|b_n'\|$, то $\bar{\rho}_{\bar{b}'}$ подчинен $\bar{\rho}$. Но тогда согласно [1] всякому $\bar{b}' \in \bar{M}'$ отвечает ограниченный оператор $\Pi(\bar{b}')$ из $\Pi(\bar{M})'$. Поскольку $[M\xi] = [M'\xi]$, то из конструкции следует, что $[\Pi(\bar{M}_d)\xi] = [\Pi(M_d')\xi]$. Пусть F — проектор на $[\Pi(\bar{M}_d)\xi]$ в $\tilde{H}$. Тогда $F \leqslant E$, так как $\Pi(\bar{M}_d') \subseteq \Pi(M)'$ и F коммутирует с $\Pi(\bar{x})$ для $\bar{x} \in \bar{M}_d$, $\bar{M}_d'$. Следовательно, если $\bar{x} \in M_d$, то $E\Pi(\bar{x})^{*}\xi = E\Pi(\bar{x})^{*}F\xi = F\Pi(\bar{x})^{*}\xi = \Pi(\bar{x})^{*}\xi$, т. е. $E\Pi(\bar{x})^{*}E = \Pi(\bar{x})^{*}E$, а, значит, $\bar{M}_d \in \bar{N}$.

Понятно, что $\Pi(\bar{M}_d) \sim M$, а в силу леммы 2.3 $\bar{\sigma}_t^\rho$, $-\infty < t < \infty$, действует на $\Pi(\bar{M}_d)$ точно так же, как и σ_t^ρ, $-\infty < t < \infty$, на M. Поэтому $\Pi(\bar{M}_d)$ σ_t^ρ-инвариантна. Но тогда алгебра $C_M^U = R \cap \Pi(\bar{M}_d)'$ также инвариантна относительно $\bar{\sigma}_t^\rho$, $-\infty < t < \infty$. Более того, поскольку состояние $\bar{\rho}$, суженное на C_M^U, удовлетворяет относительно $\bar{\sigma}_t^\rho$, $-\infty < t < \infty$, условиям КМШ [2], то σ_t^ρ, $-\infty < t < \infty$, — г.м.а. для C_M^U.

Теорема 3.1. (I) *Алгебра C_M^U и состояние $\bar{\rho}|C_M^U$ не зависят от выбора т.н. состояния ρ на M и являются алгебраическими инвариантами M.*

(II) *Если алгебра C_M^U некоммутативна, то она не содержит абелевых проекторов. Таким же свойством обладает и подалгебра (C_M^U) алгебры C_M^U, содержащая все элементы A из C_M^U, удовлетворяющие условию $\bar{\sigma}_t^\rho(A) = A$, $-\infty < t < \infty$.*

Теорема 3.2. *Пусть $\bar{\Delta}$ — м.о. для C_M^U, являющийся сужением $\bar{\Delta}_{\bar{\rho}}$ на C_M^U. Тогда $\bar{\Delta}$ обладает следующими свойствами:*

1) $\operatorname{Spec}\bar\Delta$ — *алгебраический инвариант* M, $\operatorname{Spec}\bar\Delta \subseteq S(M)$ (*см. п.* 1);

2) *положительные точки* $\operatorname{Spec}\bar\Delta$ *составляют группу по умножению*;

3) *если число* λ $(\lambda>0, \lambda\neq 1)$ *является собственным значением* $\bar\Delta$, *то* $\lambda\in A(M)$;

4) *число* $1\in A(M)$ *тогда и только тогда, когда алгебра* $(C_M{}^U)_{\bar\rho}$ *некоммутативна* (*т. е. имеет тип* II_1).

(Из теоремы 3.1, (II) и теоремы 3.2, 2) следует, что $C_M{}^U$ не содержит в качестве прямого слагаемого алгебр типа I и II_∞).

В заключение п. 3 отметим, что конструкция алгебры $C_M{}^U$ была подсказана работами ([6], [7]).

4. Теорема 3.2 позволяет указать способ вычисления множества $A(M)$ с помощью м.о. Напомним, что ограниченная последовательность операторов (a_n) из M называется центральной последовательностью (ц.п.), если для любого $x\in M$ и всякого вектора $\eta\in H$ выполнено соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}\|[x, a_n]\eta\|=0$.

Теорема 4.1. *Пусть* M, H, ρ, ξ *и* Δ_ρ — *такие же, как и в п.* 2.

(I) *Для того чтобы число* λ $(\lambda>0, \neq 1)$ *принадлежало* $A(M)$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала ц.п.* (a_n) *операторов из* M, *для которой*

$$\lim_{n\to\infty}\|(\Delta_\rho{}^{1/2}-\lambda^{1/2})a_n\xi\|=0, \quad \overline{\lim_{n\to\infty}}\|a_n\xi\|>0\,(^{12}).$$

(II) *Для того чтобы число* λ $(\lambda>0)\in A(M)$, *необходимо и достаточно, чтобы в* M *существовала ц.п. частично изометрических операторов* (v_n) *со свойствами*:

а) $v_n{}^*v_n+v_nv_n{}^*=1$, $v_nv_n=0$;

б) $\lim\limits_{n\to\infty}\|(\Delta_\rho{}^{1/2}-\lambda^{1/2})v_n\xi\|=0$.

5. Рассмотрим некоторые приложения. Пусть A — C^*-алгебра, G — группа $*$-автоморфизмов A, относительно которой A является асимптотически абелевой, т. е. в G существует последовательность элементов (γ_n) такая, что для любых $x, y\in A$

$$\lim_{n\to\infty}\|[\gamma_n(x), y]\|=0, \quad [x, y]=xy-yx. \tag{5,1}$$

Теорема 5.1. *Пусть* A — C^*-*алгебра*, G — *группа автоморфизмов* A, *относительно которой* A *асимптотически абелева*, ρ — G-*инвариантное состояние на* A. *Пусть* π_ρ — *представление* A, *построенное с помощью* ρ *согласно конструкции ГНС и пусть* ρ *продолжается до т.н. состояния на* $M=\pi_\rho(A)''$.

Тогда M $*$-*изоморфизм подалгебре* $C_M{}^U$, *инвариантной относительно* $\bar\sigma_t{}^\rho$, $-\infty<t<\infty$, *где* $\sigma_t{}^\rho$, $-\infty<t<\infty$, *г.м.а. алгебры* $C_M{}^U$.

(В физических приложениях ([8], [9]) A — алгебра квазилокальных наблюдаемых, G — группа пространственных трансляций, $\sigma_t{}^\rho$, $-\infty<t<\infty$, — группа временной эволюции, ρ — предельное состояние Гиббса и т.н.).

Для доказательства заметим, что в силу G-инвариантности ρ всякий автоморфизм g из G расширяется до автоморфизма $M=\pi_\rho(A)''$. Рассмотрим C^*-алгебру $\bar M_G$ последовательностей вида $(\gamma_n(x))$, где $x\in M$. Понятно, что $\bar M_G\subset\bar M$ и $M_G\sim M$. Точно так же, как и в п. 3, можно показать, что $\bar M_G\subset\bar N$, но тогда в силу (5.1) $\Pi(\bar M_G)E\subset C_M{}^U$.

Следствие 5.2. *Пусть выполнены условия теоремы. Тогда*:

(I) $\operatorname{Spec}\Delta_\rho=\operatorname{Spec}\bar\Delta=S(M)$, *где* Δ_ρ *и* $\bar\Delta$ — *м.о. для* M *и* $C_M{}^U$ *соответственно*;

(II) *точки* $\operatorname{Spec}\Delta_\rho$ *составляют группу* (*ср. с* ([4], [5]));

(III) M *не может быть фактором типа* I *или* II_∞. *Более того, если число* λ $(\lambda\neq 0,1)$ *является собственным значением* Δ_ρ, *то* $\lambda\in A(M)$.

Для доказательства (I) заметим, что в силу теоремы 3.2, 1) $\operatorname{Spec}\tilde{\Delta}\subset\subset S(M)\subseteq\operatorname{Spec}\Delta_\rho$, а в силу теоремы 5.1 $\operatorname{Spec}\Delta_\rho\subseteq\operatorname{Spec}\tilde{\Delta}$. (II) вытекает из теоремы 3.2, 2).

Возникает естественный вопрос: каково множество $A(M)$ для алгебры $M=\pi_\rho(A)''$, удовлетворяющей условиям теоремы 5.1. Если $\operatorname{Spec}\Delta_\rho==(\lambda^n, n\in\mathbf{Z})$, $0<\lambda\leqslant 1$, то в силу следствия 5,2 $A(M)=S(M)$. В общем случае пока удалось доказать следующее утверждение.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены предположения теоремы* 5.1 *и пусть т.н. состояние* ρ *на* $M=\pi_\rho(A)''$ *допускает сколь угодно точную аппроксимацию почти-периодическими состояниями на* M. *Тогда* $A(M)=S(M)$.

Напомним, что т.н. состояние ρ на M называется почти-периодическим, если спектр соответствующего м.о. Δ_ρ чисто точечный.

В заключение сформулируем две проблемы в этой теории:

1) Пусть фактор M обладает нетривиальной алгеброй $C_M{}^U$; следует ли отсюда, что $A(M)\neq\emptyset$? 2) Как связаны между собой асимптотические алгебры для двойственных по М. Такесаки неймановских алгебр?

Физико-технический институт низких температур
Академии наук УССР
Харьков

Поступило
29 VI 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

[1] *М. А. Наймарк,* Нормированные кольца, «Наука», 1969. [2] *M. Takesaki, Tomita's* Theory of Modular Hilbert Algebras and its Appl., Lecture Notes in Math., Berlin — Heidelberg — N. Y., 1970, p. 128. [3] *H. Araki, E. J. Woods,* Publ. RIMS, Kyoto Univ., Ser. A, v. 3, 51 (1968). [4] *H. Araki,* Comm. math. phys., v. 28, 267 (1972). [5] *E. Størmer,* ibid., v. 28, 279 (1972). [6] *Ю. И. Любич,* ДАН, т. 200, 777 (1971). [7] *D. McDuff,* Proc. London Math. Soc., v. 21, 443 (1970). [8] *D. W. Robinson,* Comm. math. phys., v. 7, 337 (1968). [9] *H. Araki,* ibid., v. 14, 120 (1969). [10] *Н. Дэнфорд, Дж. Шварц,* Линейные операторы, т. 1, ИЛ, 1962. [11] *В. Я. Голодец,* Функц. анализ и его прилож., т. 6, в. 1, 70 (1972). [12] *В. Я. Голодец,* Там же, т. 7, в. 3, 77 (1973).