

С. Ю. ХАЗАНОВ

**ГАРМОНИЧЕСКИЕ ВОЛНЫ В ОРТОТРОПНОМ ЦИЛИНДРЕ**

(Представлено академиком Ю. Н. Работновым 18 VII 1974)

Рассматривается распространение продольных гармонических волн в цилиндрически ортотропном бесконечном круговом цилиндре для случая, когда модуль в направлении оси  $z$  (оси цилиндра) значительно превышает модули в радиальном и тангенциальном направлениях. В <sup>(1)</sup> найдено решение в рядах для случая произвольной ортотропии, где коэффициенты рядов находятся по рекуррентным формулам. Замкнутых решений в литературе не появлялось.

Уравнения движения в перемещениях для упругого тела, обладающего цилиндрической ортотропией, запишутся в цилиндрических координатах  $r, \theta, z$  ( $z$  по оси цилиндра) следующим образом:

$$\begin{aligned}
 c_{11} \left( u_{rr} + \frac{u_r}{r} \right) - c_{22} \frac{u}{r^2} + \frac{c_{66}}{r^2} u_{\theta\theta} + c_{44} u_{zz} + \frac{c_{12} + c_{66}}{r} v_{r\theta} - \\
 - \frac{c_{22} + c_{66}}{r^2} v_{\theta} + (c_{13} + c_{44}) w_{rz} + \frac{c_{12} - c_{23}}{r} w_z = \rho u_{tt}, \\
 \frac{c_{12} + c_{66}}{r} u_{r\theta} + \frac{c_{22} + c_{66}}{r^2} u_{\theta} + c_{66} \left( v_{rr} + \frac{v_r}{r} - \frac{v}{r^2} \right) + \\
 + \frac{c_{22}}{r^2} v_{\theta\theta} + c_{55} v_{zz} + \frac{c_{23} + c_{55}}{r} w_{\theta z} = \rho v_{tt}, \\
 (c_{13} + c_{44}) u_{rz} + \frac{c_{23} + c_{44}}{r} u_z + \frac{c_{23} + c_{55}}{r} v_{\theta z} + c_{44} \left( w_{rr} + \frac{w_r}{r} \right) + \frac{c_{55}}{r^2} w_{\theta\theta} + c_{55} w_{zz} = \rho w_{tt},
 \end{aligned} \tag{1}$$

где  $u, v, w$  — компоненты перемещения по осям  $r, \theta, z, t$  — время,  $\rho$  — плотность,  $c_{ij}$  ( $i, j = 1, \dots, 6$ ) — компоненты матрицы упругих модулей, а индекс внизу означает производную по соответствующей координате.

Рассмотрим случай продольных волн:  $v=0$ ,  $u$  и  $w$  не зависят от  $\theta$ . Тогда, если искать решения в виде  $u=U(r) \cos(\omega t + \alpha z)$ ,  $w=W(r) \sin(\omega t + \alpha z)$ , где  $\omega$  — частота,  $\alpha$  — волновое число, то получим для  $U$  и  $W$  систему:

$$\begin{aligned}
 r^2 U'' + r U' + (ar^2 - m^2) U + br^2 W' + cr W = 0, \\
 r W'' + W' + fr W + dr U' + e U = 0,
 \end{aligned} \tag{2}$$

где  $U' \equiv dU(r)/dr$ ,  $W' \equiv dW(r)/dr$  и

$$\begin{aligned}
 a = (\rho\omega^2 - \alpha^2 c_{44})/c_{11}, \quad d = -\alpha(c_{13} + c_{44})/c_{44}, \quad b = \alpha(c_{13} + c_{44})/c_{11}, \\
 e = -\alpha(c_{23} + c_{44})/c_{44}, \quad m^2 = c_{22}/c_{44}, \quad f = (\rho\omega^2 - \alpha^2 c_{33})/c_{44}, \\
 c = \alpha(c_{13} - c_{23})/c_{11}, \quad e = d(1 - c/b).
 \end{aligned} \tag{2*}$$

Для того чтобы расщепить эту систему на отдельные уравнения для  $U$  и  $W$ , поступим следующим образом:

$$bW' + \frac{c}{r}W \equiv br^{-c/b}(r^{c/b}W)' = - \left[ U'' + \frac{U'}{r} + U \left( a - \frac{m^2}{r^2} \right) \right].$$

Тогда

$$W = - \frac{1}{b} r^{-c/b} \int_0^r x^{c/b} \left[ U'' + \frac{U'}{x} + U \left( a - \frac{m^2}{r^2} \right) \right] dx.$$

Затем формальным дифференцированием вычислим  $W'$  и  $W''$  и подставим во второе уравнение из (2). Приведа подобные члены, еще раз продифференцируем полученное соотношение, чтобы избавиться от интеграла. В результате громоздких преобразований придем к уравнению для  $U(r)$

$$\begin{aligned} U^{(IV)} + U''' \left( \frac{4}{r} - \frac{2fr}{fr^2+c^2/b^2} \right) + U'' \left( \frac{2-m^2}{r^2} + a+f-bd - \frac{2f(2-c/b)}{fr^2+c^2/b^2} \right) + \\ + U' \left( \frac{m^2}{r^3} + \frac{3a+f-2bd-bc-be}{r} + \frac{2f(c/b+m^2)}{r(fr^2+c^2/b^2)} + \frac{2fr(bd-a)}{fr^2+c^2/b^2} \right) + \\ + U \left( -\frac{m^2}{r^4} + \frac{a-eb-ec-m^2f}{r^2} + af + \frac{2f(eb+ac/b-a)}{fr^2+c^2/b^2} - \frac{2fm^2(1+c/b)}{r^2(fr^2+c^2/b^2)} \right) = 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогичным образом получается уравнение для  $W(r)$ :

$$\begin{aligned} W^{(IV)} + \left( \frac{4}{r} - \frac{2ar}{e^2/d^2-m^2+ar^2} \right) W''' + \left( a+f-bd + \frac{2e^2/d^2-m^2}{r^2} + \right. \\ \left. + \frac{2a(e/d-2)}{e^2/d^2-m^2+ar^2} \right) W'' + W' \left( \frac{2e^2/d^2-m^2-2}{r^3} + \frac{a-be-2bd+3f-cd}{r} + \right. \\ \left. + \frac{2ar(bd-f)}{e^2/d^2-m^2+ar^2} + \frac{2ae/d}{r(e^2/d^2-m^2+ar^2)} \right) + \left( af + \frac{(2e^2/d^2-m^2-1)f-cd(e/d+1)}{r^2} + \right. \\ \left. + \frac{2a[f(e/d-1)+cd]}{e^2/d^2-m^2+ar^2} \right) W = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Но у большинства конструкционных материалов, обладающих ортотропией упругих свойств (как прямолинейной, так и цилиндрической), один из модулей (в нашем случае  $E_z$ ) значительно больше двух других: например, для березы отношения  $E_z/E_r$  и  $E_z/E_\theta$  составляют, согласно (2), соответственно 14,79 и 26,48, для пихты — 13,83 и 26,53, для обычной ели — 23,10 и 40,56, для канадской ели — 20,62 и 26,41. Для графитов и углепластиков это уже будут величины порядка  $10^3$ . Поэтому предположим, что  $c_{33} \gg c_{11}, c_{22}$  (а также и остальных  $c_{ij}$ ). Тогда  $f-bd \approx f$  и (4) упростится настолько, что становится возможным его факторизовать (т.е. разложить дифференциальный оператор, соответствующий (4), на произведение двух операторов меньшего порядка, в данном случае второго):

$$\begin{aligned} \left[ D^2 + \left( -\frac{3}{r} - \frac{2r}{r^2+y} \right) D + \left( a + \frac{2e^2/d^2-m^2-1}{r^2} + \frac{2e/d-2}{r^2+y} \right) D^0 \right] \times \\ \times \left[ D^2 + \frac{D^1}{r} + fD^0 \right] W = 0, \end{aligned} \quad (4^*)$$

где  $D$  означает оператор дифференцирования, а  $y \equiv (e^2/d^2 - m^2)/a$  (в случае трансверсальной изотропии  $y=0$ ).

Итак, вместо  $LW=0$  (где  $L$  — оператор 4-го порядка) получили  $L_2L_1W=0$  ( $L_1$  и  $L_2$  — операторы 2-го порядка). Обозначим  $L_1W \equiv V$ , тогда  $L_2V=0$ , его решением будет  $V=V_0$  и для  $W$  имеем окончательно  $L_1W=V_0$ .

У нас  $L_2V=0$  это есть:

$$V'' + \left( \frac{3}{r} - \frac{2r}{r^2+y} \right) V' + \left( a + \frac{2e^2/d^2 - m^2 - 1}{r^2} + \frac{2e/d-2}{r^2+y} \right) V = 0. \quad (5)$$

В точке  $r=0$  имеем особенность. Составляем определяющее уравнение

$$\mu^2 + 2\mu + (2e^2/d^2 - m^2 - 1) = 0. \quad (6)$$

Его корни  $\mu_1 = -1 - (2 + m^2 - 2e^2/d^2)^{1/2}$  и  $\mu_2 = -1 + (2 + m^2 - 2e^2/d^2)^{1/2}$ . Тогда два линейно-независимых решения (5) будут иметь вид

$$V_1 = r^{\mu_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k r^k, \quad V_2 = r^{\mu_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k r^k.$$

Так как  $2 + m^2 - 2e^2/d^2 > 0$ , то  $\mu_1 < -1$ ,  $\mu_2 > -1$  и  $\mu_2 \neq 0$  ( $\mu_2 = 0$  для трансверсально-изотропного тела).

Как указано выше,  $W(r)$  находится из уравнения

$$L_1W = W'' + W'/r + fW = V_0 = cV(r), \quad (7)$$

где  $C$  — произвольная константа, а  $V(r)$  — решение (5).

Из физических соображений предполагая гладкость  $W(r)$  вблизи точки 0, сразу получаем из вышеизложенного, что в (7):  $C=0$ ,

$$W'' + W'/r + fW = 0, \quad (8)$$

$$W = BI_0(f^{1/2}r), \quad (8^*)$$

$I_m$  — здесь и дальше бесселева функция первого рода,  $B$  — произвольная константа. Тогда  $U(r)$  определяется из исходной системы:

$$U'' + \frac{U'}{r} + U \left( a - \frac{m^2}{r^2} \right) = -B \left[ bI_0'(f^{1/2}r) + \frac{c}{r} I_0(f^{1/2}r) \right], \quad (9)$$

$$U(r) = AI_m(a^{1/2}r) - BI_m(a^{1/2}r) \cdot \int \frac{b \int r I_0'(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr + c \int I_m(a^{1/2}r) I_0(f^{1/2}r) dr}{r I_m^2(a^{1/2}r)} dr \quad (9^*)$$

где  $A$  — константа.

(8\*) и (9\*) и есть точные решения поставленной задачи. Отметим, что при  $m=1$ ,  $c=0$  (т. е. в случае трансверсальной изотропии) они переходят в известные решения для трансверсально-изотропного тела с сильной анизотропией в направлении  $z$  (3):

$$U = \frac{d}{dr} \left[ AI_0(a^{1/2}r) - \frac{bB}{a-f} I_0(f^{1/2}r) \right], \quad W = BI_0(f^{1/2}r). \quad (10)$$

Граничные условия на поверхности цилиндра сводятся к следующим:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = 0 \text{ при } r=R,$$

$$\begin{aligned} \sigma_{rr} = c_{11}u_r + c_{12} \frac{u}{r} + c_{13}w_z = \dots = A \left[ c_{11}I_m'(a^{1/2}r) + c_{12} \frac{I_m(a^{1/2}r)}{r} \right] - \\ - B \left[ c_{11}I_m'(a^{1/2}r) \cdot \int \frac{b \int r I_m(a^{1/2}r) I_0'(f^{1/2}r) dr + c \int I_0(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr}{r I_m^2(a^{1/2}r)} dr + \right. \\ \left. + c_{11} \frac{b \int r I_0'(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr + c \int I_0(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr}{r I_m(a^{1/2}r)} + c_{12} \frac{I_m(a^{1/2}r)}{r} \right] \times \\ \times \int \frac{b \int r I_0'(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr + c \int I_0(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr}{r I_m^2(a^{1/2}r)} - \alpha c_{13} I_0(f^{1/2}r) \Big] = 0 \text{ при } r=R, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{\sigma_{rz}}{c_{44}} = u_z + w_r = -\alpha A I_m(a^{1/2}r) + B \left[ \alpha I_m(a^{1/2}r) \times \int \frac{b \int r I_0'(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr + c \int I_m(a^{1/2}r) I_0(f^{1/2}r) dr}{r I_m^2(a^{1/2}r)} dr + I_0'(f^{1/2}r) \right] = 0 \text{ при } r=R.$$

Это система двух линейных однородных алгебраических уравнений относительно  $A$  и  $B$ . Детерминант ее должен быть равен нулю (для существования решения):

$$\left[ c_{11} I_m'(a^{1/2}R) + c_{12} \frac{I_m(a^{1/2}R)}{R} \right] \cdot \left[ \alpha I_m(a^{1/2}R) \cdot \int_0^R \frac{b \int r I_0'(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr + c \int I_0(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr}{r I_m^2(a^{1/2}r)} dr + I_0'(f^{1/2}R) \right] =$$

$$= \alpha I_m(a^{1/2}R) \cdot \left[ c_{11} I_m(a^{1/2}R) \cdot \int_0^R \frac{b \int r I_0'(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr + c \int I_0(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr}{r I_m^2(a^{1/2}r)} dr + \right.$$

$$\left. + c_{11} \frac{b \int_0^R r I_0'(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr + c \int_0^R I_0(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr}{R I_m(a^{1/2}R)} + \right.$$

$$\left. + c_{12} \frac{I_m(a^{1/2}R)}{R} \cdot \int_0^R \frac{b \int r I_0'(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr + c \int I_0(f^{1/2}r) I_m(a^{1/2}r) dr}{r I_m^2(a^{1/2}r)} dr - \right.$$

$$\left. - \alpha c_{13} I_0(f^{1/2}R) \right] = 0. \quad (12)$$

Получили характеристическое уравнение, из которого может быть найдена фазовая скорость  $v$  в зависимости от  $\alpha$ . В случае длин волн, больших  $R$ , в разложениях бесселевых функций отбросим члены порядка  $(\alpha R)^2$  и выше и получим

$$f \approx 0, \quad (12^*)$$

т. е.

$$\rho v_0^2 \approx c_{33}, \quad (13)$$

где  $v_0$  — скорость при больших длинах волн ( $\alpha \rightarrow 0$ ). В (1) приведено выражение для  $v_0$  в случае произвольной ортотропии

$$\rho v_0^2 = c_{33} - \frac{c_{13}^2 - c_{23}^2}{c_{11} - c_{22}}. \quad (14)$$

Сравнение (13) и (14) (в условных единицах) на основе данных (2) показывает (табл. 1), что в условиях предложенной гипотезы формула (13) дает вполне достоверные результаты.

Таким образом, можно заключить, что для ортотропного материала анизотропия в направлении оси  $z$  играет более существенную роль, чем анизотропия в плоскости  $r\theta$  (так, в нашем случае мы получили решение, близкое к трансверсально-изотропному).

Автор благодарен акад. Ю. Н. Работнову и Ю. В. Суворовой за ценные замечания при обсуждении статьи.

Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова

Поступило  
3 VII 1974

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- <sup>1</sup> J. L. Nowinski, Trans. ASME, v. 89, Ser. B, № 3, 408 (1967). <sup>2</sup> Е. К. Ашкенази, Э. В. Ганов, Анизотропия конструкционных материалов, Справочник, Л., 1972.  
<sup>3</sup> R. W. Morse, J. Acoust. Soc. Am., v. 26, № 6, 1018 (1954).