

С. А. АЛЕСКЕРОВ, А. Ф. ГРИГОРОВИЧ

О МНОГОТОВАРНЫХ ПОТОКАХ В СЕТЯХ СВЯЗИ

(Представлено академиком А. А. Дородницыным 5 VIII 1974)

Известная теорема Форда — Фалкерсона о максимальном потоке и минимальном разрезе ⁽¹⁾ доказана для однотоварного потока на двухполюсной сети. Отдельные вопросы распределения многотоварных потоков и управления ими на сетях связи рассмотрены в работах различных авторов ⁽²⁻¹³⁾. В данной работе приведены необходимые и достаточные условия существования максимальных многотоварных потоков в сети при определенных ограничениях на потоки и сеть. Для доказательства теоремы о многотоварных потоках в сети введены понятия нескольких различных, максимально различных и равномерно различных деревьев в мультиграфе. Априори пути для каждого однотоварного потока определяются таким образом, чтобы свести к минимуму (или к вполне определенной величине) возможность занятия этого пути другими однотоварными потоками.

1. Сеть связи отображается мультиграфом без петель $L=(X, U; P)$, где $X=\{n_i\}$, $i=1, \dots, n$, — множество вершин, $U=\{u_j\}$, $j=1, \dots, m$, — множество ребер, P — инцидентор мультиграфа ⁽¹⁴⁾. Конечный граф T_γ есть прадерево с корнем $n_\gamma \in X$ (или корневое дерево), если: а) в каждую вершину $\neq n_\gamma$ заходит одно единственное ориентированное ребро — дуга, б) в n_γ не заходит ни одна дуга, в) T_γ не содержит контуров. Рассматриваются сети, в которых массивы информации (требования) между парой вершин n_i (источник) и n_j (сток), $i \neq j$, передаются одним потоком без его дробления (по одному пути).

Основной трудностью при доказательстве теоремы 1 является то, что поток одного товара неизбежно занимает ребра, входящие в минимальный разрез для другого.

Определение. Однотоварный поток величины f_{ij} из n_i в n_j , $i \neq j$, в сети $L=(X, U; P)$ есть функция F_i , отображающая множество U в множество неотрицательных целых чисел, удовлетворяющая линейным уравнениям и неравенствам

$$\sum_{n_y \in X_x^+} F_i(n_x, n_y) - \sum_{n_y \in X_x^-} F_i(n_y, n_x) = \begin{cases} f_{ij}, & x=i, \\ 0, & x \neq i, j, \\ -f_{ij}, & x=j, \end{cases}$$

$F_i(n_x, n_y) \leq c(n_x, n_y)$ для $\forall (n_x, n_y) \in U$, где $c(n_x, n_y) = 1$ — пропускная способность (n_x, n_y) , $f_{ij} = 0, 1$ и $X_x^+ = \{n_y | (n_x, n_y) \in U\}$, $X_x^- = \{n_y | (n_y, n_x) \in U\}$.

Определение. Многотоварным потоком называется совокупность одновременных однотоварных потоков F_k величиной f_{hk} ($k, k' = 1, \dots, q$, $q \leq n$), удовлетворяющая неравенству

$$\sum_{k=1}^q |v_{ij}^k| \leq c(n_i, n_j)$$

для всех $c(n_i, n_j)$, где v_{ij}^k — величина k -го однотоварного потока по ребру (n_i, n_j) и $c(n_i, n_j) = 1$, $i, j = 1, \dots, n$.

О п р е д е л е н и е. М а к с и м а л ь н ы м называется такой многотоварный поток, для которого

$$\sum_{k=1}^n f_{ij} = n.$$

Задача о существовании максимального многотоварного потока может быть поставлена следующим образом. Заданы сеть L , $c(n_i, n_i)$ и $c(i)$ — пропускная способность узла n_i . Существует ли на данной сети одновременно F_n с $f_{kk'}=1, i, j, k, k'=1, \dots, n$?

Будем говорить, что метрика дерева равна метрике исходного мультиграфа, если расстояние по дереву равно расстоянию по мультиграфу, у которого кратные ребра имеют равную длину.

Т е о р е м а 1. Для сети L в любой момент времени максимальная величина многотоварного потока с ограничениями, указанными ниже, допустима тогда и только тогда, когда корневые деревья источников требований максимально различны, метрика деревьев равна метрике мультиграфа сети, а пропускные способности узлов не меньше максимально возможного числа источников требований в сети.

Ограничения: а) каждый поток передается лишь по одному пути;

б) все ребра мультиграфа L однородны по своим характеристикам;

в) пропускные способности $c(n_i, n_i)=1, i, j=1, \dots, n$, для каждого ребра, $|X|=n$;

г) $|U|=m \geq n(n-1)$;

д) $d(i) < n-1$, где $d(i)$ — степень узла n_i .

2. Расстоянием между двумя деревьями T_i и T_j называется число ребер $D(T_i, T_j) = 1/2 N(T_i \oplus T_j)$, где $N(T_i \oplus T_j)$ есть число ребер подграфа $T_i \oplus T_j$ и $T_i \oplus T_j = T_i \cup T_j - T_i \cap T_j$. Пара деревьев, не имеющая общих ветвей, является максимально различной (¹⁶, ¹⁷). Ветвью называется ребро, принадлежащее дереву.

О п р е д е л е н и е. v деревьев назовем различными, если каждая пара деревьев $(T_i, T_j), i, j=1, \dots, v$, различна, т. е. $D(T_i, T_j) \neq 0$.

О п р е д е л е н и е. Совокупность v деревьев мультиграфа L назовем максимально различной, если для каждой ветви u_φ дерева $T_i, i=1, \dots, v$, нагрузка ветви равна единице, т. е. $\tau_\varphi=1, \varphi=1, \dots, m$.

Нагрузка τ_φ ребра u_φ определяется как число участков ребра u_φ в различных деревьях одновременно. Число $\Omega_v = [v(n-1)/m]$ можно определить как ожидаемую равномерную нагрузку каждого ребра мультиграфа L ; $[x]$ — наибольшее целое число, не превосходящее x .

О п р е д е л е н и е. Совокупность v деревьев мультиграфа L назовем максимально равномерно различной, если для каждой ветви дерева $T_i, i=1, \dots, v$, нагрузка $\tau_\varphi = \Omega_v = v(n-1)/m > 1, \varphi=1, \dots, m$.

Аналогичные определения максимального различия и максимально равномерного различия предлагаются для совокупности v корневых деревьев мультиграфа L с корнями в $n_\gamma, \gamma=1, \dots, v$, имеющих метрику L .

Число корней v сети L определяется числом вершин, способных генерировать требования, и, вообще говоря, $v \leq n$.

Если $\tau_\varphi > \Omega_v$, то данная общая ветвь u_φ называется надветвью; если $\tau_\varphi \leq \Omega_v$, то данное ребро называется надхордой.

Расстояние па v деревьев относительно исходного дерева T_γ определяется как сумма расстояний $D(T_\gamma, T_i)$ ($\gamma = \text{const}; i=1, \dots, \gamma-1, \gamma+1, \dots, v$) между парами деревьев (T_γ, T_i) , т. е.

$$D(T_\gamma, \Sigma T_i) = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq \gamma}}^{v-1} D(T_\gamma, T_i).$$

Каждое из деревьев T_γ и $T_i, i=1, \dots, \gamma-1, \gamma+1, \dots, v$, имеет матрицу

простых разрезов $A_{L\gamma} = [IA_{L\gamma_{12}}]$ и $A_{Li} = [IA_{Li_{12}}]$ относительно деревьев T_γ и T_i . Множество операций замены по определенным правилам надветви допустимой надхордой приводит к увеличению расстояния между деревьями T_γ и T_i , $i=1, \dots, \gamma-1, \gamma+1, \dots, v$, где ветви дерева T_γ не меняются. Для произвольной связной сети L процесс замены заканчивается построением совокупности деревьев со степенью различия, зависящей от ресурсов $m = |U|$ сети L .

Определение. Совокупность v деревьев мультиграфа L назовем равномерно различной, если после операций замены для ветви u_φ дерева T_i , $i=1, \dots, v$, нагрузка $\tau_\varphi = \Omega_{v\varphi}$, $\varphi=1, \dots, m$, и имеется хотя бы одно ребро с $\tau_\varphi \neq \Omega_{v\varphi}$.

Теорема 2. Совокупность v корневых деревьев, у которых метрика равна метрике соответствующих строк матрицы расстояний мультиграфа L , является максимальной различной, если $D(T_\gamma, \Sigma T_i)$ относительно исходного корневого дерева T_γ с корнем n_γ равно $(v-1)(n-1)$.

3. Из теоремы 1 получено следствие, которое можно рассматривать как критерий для синтеза коммуникационных сетей, оптимальных с точки зрения обеспечения максимальной пропускной способности.

Следствие. Для обеспечения максимальной пропускной способности сети с заданными в источниках требуемое число ребер мультиграфа L должно удовлетворять соотношению

$$v(n-1)/m \equiv 0 \pmod{m}.$$

Для сетей с ограниченными ресурсами, в которых $n-1 < m < n(n-1)$ и массивы информации, передаваемые по сети, имеют фиксированную длину, целесообразно применение равномерно различных деревьев. Для подобных сетей дается утверждение, которое было проверено методом статистических испытаний:

для связной сети L с ограничениями, указанными ниже, величина многоготоварного потока максимизируется, если корневые деревья узлов — источников требований равномерно различны и метрика корневых деревьев равна метрике сети L .

- Ограничения:** а) каждый поток передается лишь по одному пути;
 б) все узлы и ребра сети однородны по своим характеристикам;
 в) пропускная способность ребра $c(n_i, n_j) = 1$; $i, j=1, \dots, n$;
 г) $d(i) < n-1$;
 д) $c(i) < n$.

Всесоюзный научно-исследовательский институт
 оптико-физических измерений
 Москва

Поступило
 5 VII 1974

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

- ¹ Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон, Потoki в сетях, М., 1966. ² S. L. Hakimi, IRE Trans. Circ. Theor., CT-9, 2, 169 (1962). ³ T. C. Hu, J. Operat. Res., v. 12, 2, 359 (1964). ⁴ T. C. Hu, J. Operat. Res., v. 11, 3, 344 (1963). ⁵ D. T. Tang, IRE Trans. Circ. Theor., CT-9, 2, 176 (1962). ⁶ D. T. Tang, J. Operat. Res., v. 13, 1, 143 (1965). ⁷ Г. Г. Саввин, Сб. Информационные сети и коммутация, ИПИ АН СССР, 30 (1968). ⁸ В. Л. Куперитох, Кибернетика, АН УССР, т. 3, 87 (1971). ⁹ K. Onaga, O. Kakusho, IEEE Trans. Circ. Theor., CT-18, 4, 425 (1971). ¹⁰ Ю. М. Ермольев, И. М. Мельник, Экстремальные задачи на графах, Киев, 1968. ¹¹ C. Y. Lee, IRE Trans. Electr. Comp., EC-10, 3, 346 (1961). ¹² В. Ф. Дьяченко, В. Г. Лазарев, Г. Г. Саввин, Управление на сетях связи, М., 1967. ¹³ М. А. Цетлин, А. В. Бутрименко, С. А. Гинзбург, Проблемы кибернетики, т. 20, 27 (1968). ¹⁴ А. А. Зыков, Теория конечных графов, т. 1, Новосибирск, 1969. ¹⁵ К. Берж, Теория графов и ее применения, М., 1962. ¹⁶ S. L. Hakimi, J. Franklin Inst., v. 272, 5, 347 (1961). ¹⁷ G. Kishi, Y. Kajitani, IEEE Trans. Circ. Theor., CT-16, 3, 323 (1969).